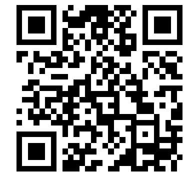
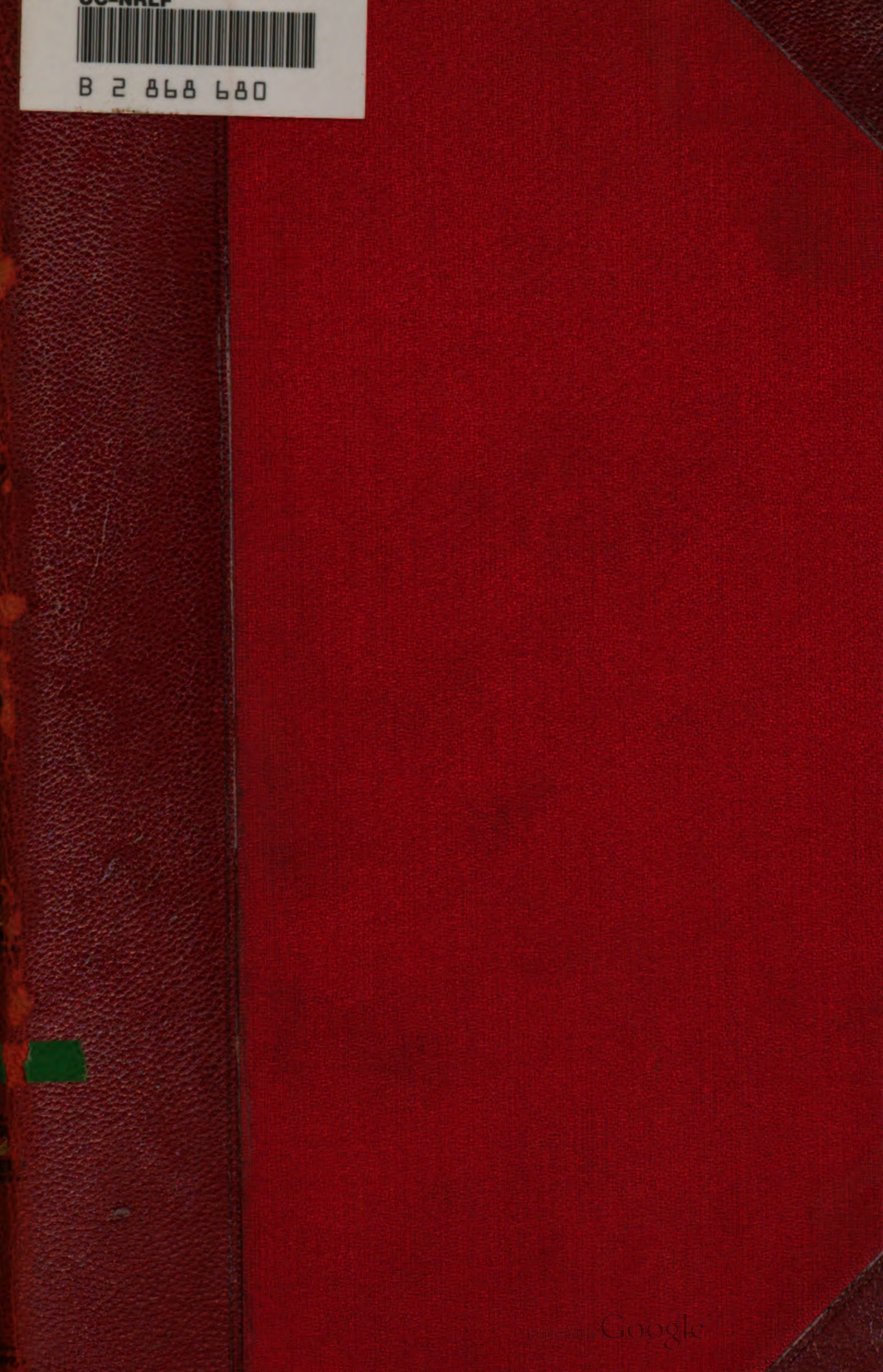
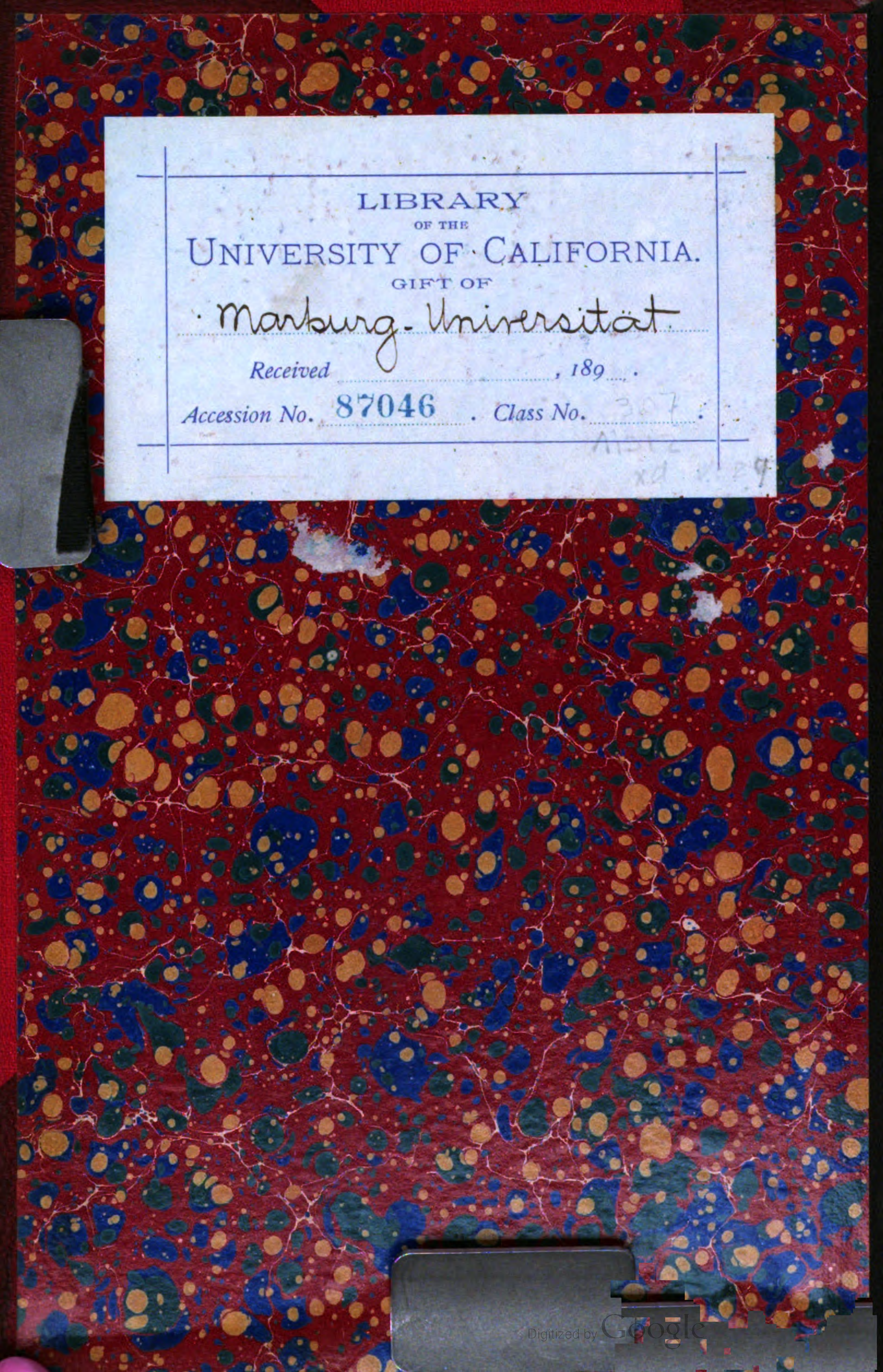
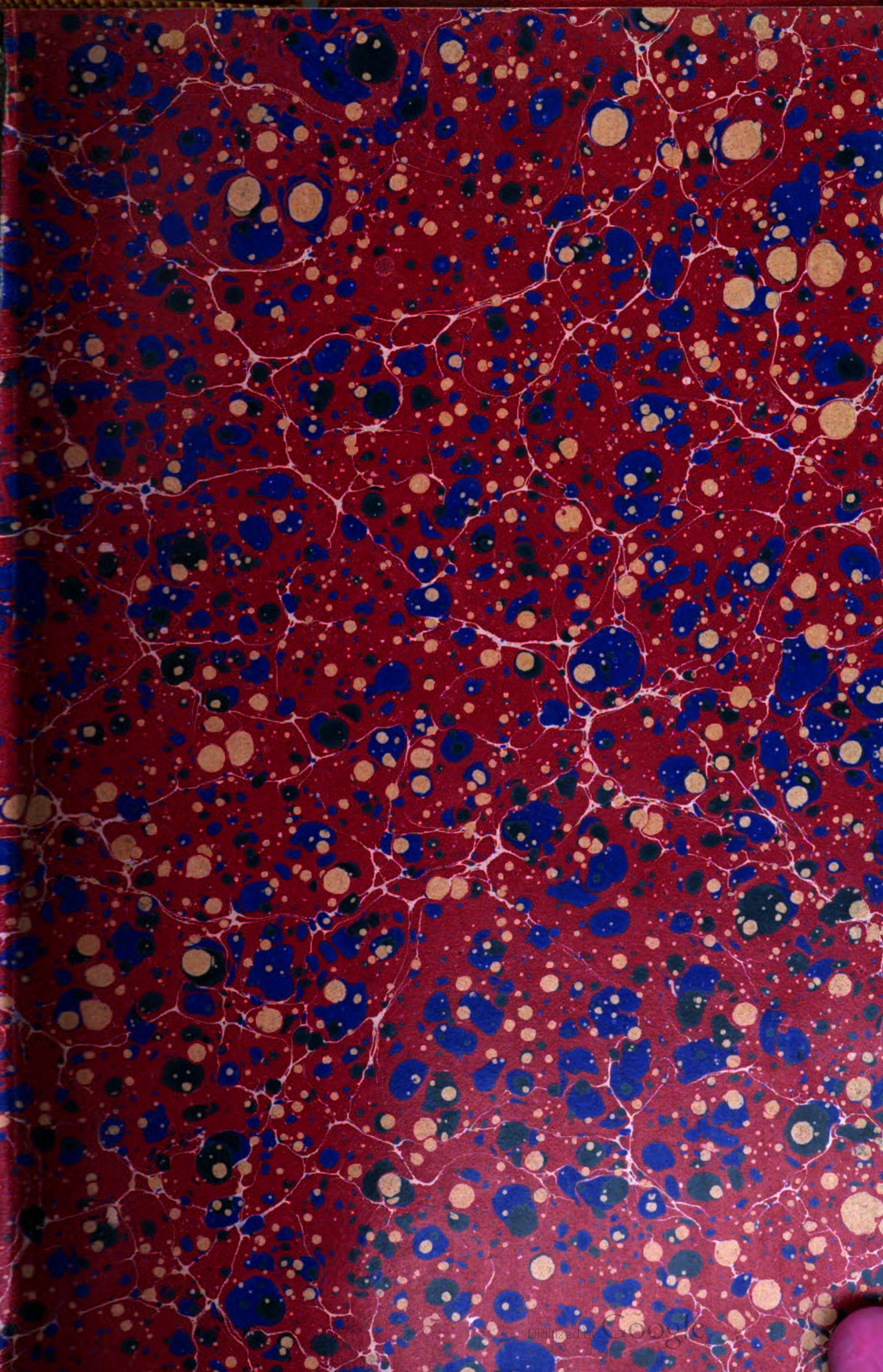





LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Marburg-Universität
Received , 189 .
Accession No. 87046 . Class No.
Digitized by Google



9.

Ueber die möglichen Fälle mehrfach hyperboloidischer Lagen zweier Tetraeder.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Meier Munk,

aus Altona, Prov. Schleswig-Holstein.

MARBURG.

Buchdruckerei von Joh. Hamel.

1893.

Angenommen als Dissertation am 20./XII. 92.

Meinem teuren Bruder

Leo

in treuer Liebe und dankbarer Verehrung

gewidmet.

Einleitung.

Liegen zwei Tetraeder derartig, dass die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken Erzeugende derselben Schaar eines einschaligen Hyperboloides sind, so bezeichnet man die Lage derselben als hyperboloidisch; die vier Geraden heissen hyperboloidische Gerade. Nun kann man die Ecken des einen den Ecken des anderen Tetraeders auf 24 (den 24 Permutionen von 4 Elementen) Weisen zuordnen und es erhebt sich die Frage, wie viele dieser 24 Lagen können gleichzeitig hyperboloidisch sein. Die Beantwortung dieser Frage hängt wesentlich — bei analytischer Behandlung — von den Koordinatenwerten ab, aus denen auch zu ersehen ist, wie die Lage der Tetraeder zu einander ist, nämlich davon, ob die Tetraeder getrennte oder ein- resp. ein- und umgeschriebene Lage haben. Es ist dieses Problem um seiner selbst willen noch nicht bebehandelt worden, sondern nur im Zusammenhang mit anderen Problemen, namentlich über Kurven und Flächen 4. Ordnung. Die Geschichte des Problems ist etwa folgende:

Nach Cayley (Quarterly Journal, Vol. 1 pag. 10) hat O. Hermes (Journal für Mathematik, Bd. 56 pag. 218) zuerst die Bedingungen für die hyperboloidische Lage zweier Tetraeder aufgestellt. Zunächst weist er darauf hin, dass die perspectivische Lage zweier Tetraeder ein besonderer Fall der hyperboloidischen ist, stellt die analytische Bedingung

der letzteren auf und giebt den analytischen Nachweis, dass, wenn die Verbindungslinien der Ecken hyperboloidische Gerade sind, dasselbe auch von den Schnittlinien der Flächen der Fall ist. Ist ein Tetraeder dem anderen eingeschrieben, so liegen sie vierfach hyperboloidisch, ist es ein- und umgeschrieben, dreifach, d. h. also, es giebt im Ganzen vier- resp. drei Zuordnungen der Ecken, nach welchen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken, bez. Schnittlinien entsprechender Seitenflächen hyperboloidische Gerade sind.

Während nun Hermes auf analytischem Wege seine Sätze nachweist, sind es später Vertreter der synthetischen Methode, die sich eingehender mit diesem Problem beschäftigten. Schröter gelangt, getreu dem Wahlspruch: „Geometrica geometrice“, auf zweierlei Weisen, beidesmal rein synthetischen Betrachtungen zu vierfach hyperboloidischen Tetraederlagen. In seinem Aufsatze „Ueber cyklisch projektive Punktquadrupel in zwei kollinearen Räumen“ (Math. Annalen Bd. 20 S. 231 u. f.) schlägt er folgenden Weg ein. Vier Punkten 1 2 3 4 in einem Raume seien vier Punkte 1′ 2′ 3′ 4′ in einem anderen Raume derartig zugeordnet, dass, wenn die Räume, wie es de facto immer der Fall ist, in einander liegen, 1 mit 2′, 2 mit 3′, 3 mit 4′, 4 mit 1′ zusammenfallen. Indem er nachweist, dass, wenn zwei Räume einmal ein solches Quadrupel besitzen, es unendlich viele solcher giebt, nennt er die Räume „in Quadrupellage befindlich“, und es gelingt ihm, mit den einfachsten Mitteln der synthetischen Geometrie in äusserst sinnreicher Weise zu beweisen: „irgend zwei Quadrupel eines solchen Raumes liegen vierfach hyperboloidisch“. Er behandelt dann die Hyperboloide selbst, sowie die Durchdringungskurve C_1^4. Zum Schlusse giebt er noch den synthetischen Nachweis an, dass, wenn zwei Räume sich hinsichtlich ihrer Punkte in Quadrupellage befinden, dies auch hinsichtlich ihrer Ebenen der Fall ist, also in bezug auf unser Problem ausgedrückt, zwei Tetraeder

zugleich hinsichtlich ihrer Ecken und hinsichtlich ihrer Seitenflächen vierfach hyperboloidische Lage haben.

Den umgekehrten Weg gewissermassen schlägt er in einer Abhandlung; „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve 4. Ordnung 1. Species" (Leipzig B. G. Teubner 1890) ein. Ausgehend von der Darstellung der C_1^4 als Durchdringungskurve eines Büschels Flächen 2. Ordnung, definiert er als Punktquadrupel vier Punkte auf der C_1^4, durch welche die vier Tangenten Erzeugende derselben Schaar eines Hyperboloides sind, und zusammengehörige Punktquadrupel, zwei Quadrupel derartig auf C_1^4 gelegen, dass die Tangenten des einen, Erzeugende des einen, die Tangenten des anderen, Erzeugende des zweiten Systems eines und desselben Hyperboloides sind. Zwei beliebige Quadrupel auf C_1^4 liegen vierfach hyperboloidisch, zwei zusammengehörige, vierfach perspectiv.

Schon ein directes Interesse an der Construction zweier möglichst oft hyperboloidisch liegender Tetraeder hat F. Schur in seiner Abhandlung: „Ueber eine besondere Fläche 4. Ordnung" (Math. Annalen Bd. 20 S. 254). Er suchte nämlich eine „solche kollinear erzeugte Fläche 4. Ordnung, für welche die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine kollineare wird". Eine solche Fläche, sagt F. Schur, enthält zwei Gruppen von 8 Geraden, und keine zwei Gerade derselben Gruppe schneiden sich. Diese 16 Geraden sind der vollständige Schnitt der Fläche 4. Ordnung mit 2 Flächen zweiter Ordnung. Je 8 Gerade sind Schnittlinien zweier vierfach hyperboloidisch liegender Tetraeder-Seitenflächen in zwei Zuordnungen. Aber auch die übrigen 8 Schnittlinien der Seitenflächen enthält die Fläche. Sie enthält also im Ganzen die 32 Schnittlinien der Seitenflächen von zweimal zwei Tetraedern. Diese zwei Tetraederpaare stehen im Zusammenhang und treten bei jeder vierfach hyperboloidischen Lage zweier Tetraeder auf.

Ameseder (Ueber Confirgurationen auf der Raumkurve 4. Ordnung 1. Species; Sitzungsberichte der Wiener Acad. d. W. Bd. 87 Abt. 2 pag. 1224), der auf eine andere vierfach hyperboloidische Lage zu sprechen kommt, nennt die vier Tetraeder ein Tetraederquadrupel.

Im Weiteren versucht nun Schur, solche Flächen zu finden, welche die obige Eigenschaft, dass für sie die eindeutige Transformation in sich eine kollineare wird, mehrfach besitzen, oder genauer, solche Flächen, welche sich möglichst oft kollinear derartig erzeugen lassen, dass für sie die eindeutige Transformation in sich eine kollineare wird. Er untersucht dann, wie viele Kollineationen zweier Punktquadrupel gleichzeitig stattfinden können und folgert daraus die Lage der zweimal 4 Punkte zu einander. Es würde zu weit führen, seinen Gedankengang zu wiederholen. Seine Resultate sind folgende: Bei ein- und umgeschriebener Lage ist höchstens die neunfach hyperboloidische Lage zweier Tetraeder möglich, von dieser sondert sich als Untergruppe eine sechsfach hyperboloidische Lage derselben ab. Diese zu finden, ist mir nicht gelungen, sondern in der vorliegenden Abhandlung folgt aus dieser sechsfachen Lage entweder ein Degenerieren der Hyperboloide oder die neunfach hyperboloidische Lage; auch liegt die analytische Behandlung der Schur'schen Arbeit nicht in dem Bereich der gestellten Aufgabe. Ferner ist noch eine fünffach hyperboloidische Lage möglich. Zum Schlusse erwähnt er noch die bei getrennter Lage der Tetraeder möglichen, von Ameseder z. T. behandelten, vierfachen Lage, die im Vorliegenden genauer behandelt ist. Die achtfach hyperboloidische Lage ist, wie er selbst schon bemerkt, nur möglich, wenn die Tetraeder als zwei Quadrupel harmonischer Ebenen, respective Punkte, vorausgesetzt sind. Die Betrachtung dieser, sowie der obenerwähnten sechsfachen Lage behalte ich mir für eine spätere besondere Abhandlung vor.

Im übrigen sind von mir benutzt worden:

Milinowski, Theorie der Raumkurve 4. Ordnung 1. Species Journal für Math. 97 pag. 277.

Poncelet, traité des propriétés project. art. 582.

Hess, Math. Annalen Bd. 28 S. 212.

Muth, „Ueber Tetederpaare" (Zeitschrift für Math. Jahrg. 1892. S. 117.)

Die vorliegende Abhandlung bezweckt, auf elementar analytischem Wege eine systematische Zusammenstellung der möglichen Fälle mehrfach hyperboloidischer Lagen zweier Tetraeder zu geben, und die Hauptlagenbeziehungen derselben sowie der Hyperboloide abzuleiten.

I. Allgemeine (getrennte) Lagen der beiden Tetraeder.

§ 1. Die Bedingung, dass 4 Gerade die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte zweier Tetraeder, hyperboloidische Lage haben, lautet, bei folgenden Kordinatenwerten der Tetraedereckpunkte:

$T.$			$T.'$	
	1.	1 0 0 0	1.'	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}$
	2.	0 1 0 0	2.'	$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}$
	3.	0 0 1 0	3.'	$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}$
	4.	0 0 0 1	4.'	$a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}$

dass $a_{ik} = a_{ki}$ ist, so dass in den Koordinatenwerten von $T.'$ noch 10 Verhältnisgrössen beliebig angenommen werden können. Die Geraden 11', 22', 33', 44' liegen auf einem Hyperboloide, dessen Gleichung ist:

$$\begin{aligned} &(a_{12}\, x_3\, x_4 + a_{34}\, x_1\, x_2)\,(a_{13}\, a_{24} - a_{14}\, a_{23}) \\ +&(a_{13}\, x_2\, x_4 + a_{24}\, x_1\, x_3)\,(a_{14}\, a_{23} - a_{12}\, a_{34}) \\ +&(a_{14}\, x_2\, x_3 + a_{23}\, x_1\, x_4)\,(a_{12}\, a_{34} - a_{13}\, a_{24}) = 0 \end{aligned}$$

oder: $\Sigma\ (a_{ik}\, x_l\, x_m + a_{lm}\, x_i\, x_k)\ (a_{il}\, a_{km} - a_{im}\, a_{kl}) = 0.$

11', 22', 33', 44' haben die resp. Gleichungen:

$$11' \qquad \frac{x_2}{a_{12}} = \frac{x_3}{a_{13}} = \frac{x_4}{a_{14}}$$

$$22' \qquad \frac{x_1}{a_{12}} = \frac{x_3}{a_{23}} = \frac{x_4}{a_{24}}$$

$$33' \qquad \frac{x_1}{a_{13}} = \frac{x_2}{a_{23}} = \frac{x_4}{a_{34}}$$

$$44' \qquad \frac{x_1}{a_{14}} = \frac{x_2}{a_{24}} = \frac{x_3}{a_{34}}$$

Nach einem schon von F. Cayley bewiesenen Satze liegen, wenn die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte hyperboloidisch sind, auch die Schnittlinien entsprechender Flächen auf einem Hyperboloide. $\overline{1}$ sei die Fläche 234, $\overline{2}$ . . . 134 etc., so lautet die Gleichung des Hyperboloides, welches die Geraden:

$$\begin{array}{llllllll}
\overline{1}\,\overline{1}' & & & A_{12}\,u_2 & = & A_{13}\,u_3 & = & A_{14}\,u_4 \\
\overline{2}\,\overline{2}' & A_{12}\,u_1 & & & = & A_{23}\,u_3 & = & A_{24}\,u_4 \\
\overline{3}\,\overline{3}' & A_{13}\,u_1 & = & A_{23}\,u_3 & & & = & A_{34}\,u_4 \\
\overline{4}\,\overline{4}' & A_{14}\,u_1 & = & A_{24}\,u_2 & = & A_{34}\,u_4 & &
\end{array}$$

enthält in Ebenenkoordinaten:

$$\begin{aligned}
&(A_{12}\,u_1\,u_2 + A_{34}\,u_3\,u_4)\,(A_{13}\,A_{24} - A_{14}\,A_{23}) \\
+\,&(A_{13}\,u_1\,u_3 + A_{24}\,u_2\,u_4)\,(A_{14}\,A_{23} - A_{12}\,A_{34}) \\
+\,&(A_{14}\,u_1\,u_4 + A_{23}\,u_2\,u_3)\,(A_{12}\,A_{34} - A_{13}\,A_{24}) = 0
\end{aligned}$$

wenn unter A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik} verstanden ist.

Es ist nun nach Jacobi (Hermes, Crelle's Journal, Bd. 56 pag. 223):

$$R\,\frac{d^h R}{da_{ik}\,da_{lm}} = \frac{dR}{da_{ki}}\,\frac{dR}{da_{lm}} - \frac{dR}{da_{km}}\,\frac{Rd}{da_{li}}$$

also: $R\,(a_{ik}\,a_{lm} - a_{im}\,a_{lk}) = A_{ik}\,A_{lm} - A_{im}\,A_{kl}$

wenn: $R = \Sigma \pm a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$ ist.

Daher kann man in obiger Gleichung für A_{ik} die Buchstaben a_{ik} setzen.

§ 2. Wir ordneten im Vorhergehenden den Punkten 1 2 3 4 die Punkte resp. 1′ 2′ 3′ 4′ zu, es können die letzteren aber auch in anderer Reihenfolge, und zwar auf 24

Weisen, zugeordnet werden, wovon etwa folgendes Schema ein Bild liefert:

		1	2	3	4	
I.	1.	1′	2′	3′	4′	
II.	2.	1′	2′	4′	3′	6 negative Permutationen, bei denen 2 Elemente ihre Plätze behalten.
	3.	1′	3′	2′	4′	
	4.	1′	4′	3′	2′	
	5.	2′	1′	3′	4′	
	6.	3′	2′	1′	4′	
	7.	4′	2′	3′	1′	
III.	8.	1′	3′	4′	2′	8 positive Permutationen, bei denen e i n Element seinen Platz behält.
	9.	1′	4′	2′	3′	
	10.	3′	2′	4′	1′	
	11.	4′	2′	1′	3′	
	12.	2′	4′	3′	1′	
	13.	4′	1′	3′	2′	
	14.	2′	3′	1′	4′	
	15.	3′	1′	2′	4′	
IV.	16.	2′	1′	4′	3′	drei positive und sechs negative Permutationen, bei denen kein Element seinen Platz behält.
	17.	3′	4′	1′	2′	
	18.	4′	3′	2′	1′	
V.	19.	3′	4′	2′	1′	
	20.	4′	3′	1′	2′	
	21.	2′	3′	4′	1′	
	22.	4′	1′	2′	3′	
	23.	3′	1′	4′	2′	
	24.	2′	4′	′1	′3	

Können mit der ersten Lage auch noch andere Lagen zugleich hyperboloidisch sein und wieviele?

Die Beantwortung dieser Frage ist wesentlich abhängig von der gegenseitigen Lage der Tetraeder. Es sei zunächst

angenommen, dass kein Eckpunkt des einen Tetraeders in den resp. Seitenflächen des anderen liege, dass also kein Koordinatenwert = 0 wird.

Die Gleichungen der übrigen 12 Geraden sind:

$$12' \qquad \frac{x_2}{a_{22}} = \frac{x_3}{a_{23}} = \frac{x_4}{a_{24}}$$

$$13' \qquad \frac{x_2}{a_{23}} = \frac{x_3}{a_{33}} = \frac{x_4}{a_{34}}$$

$$14' \qquad \frac{x_2}{a_{24}} = \frac{x_3}{a_{34}} = \frac{x_4}{a_{44}}$$

$$21' \qquad \frac{x_1}{a_{11}} \qquad = \frac{x_3}{a_{13}} = \frac{x_4}{a_{14}}$$

$$23' \qquad \frac{x_1}{a_{13}} \qquad = \frac{x_3}{a_{33}} = \frac{x_4}{a_{34}}$$

$$24' \qquad \frac{x_1}{a_{14}} \qquad = \frac{x_3}{a_{34}} = \frac{x_4}{a_{44}}$$

$$31' \qquad \frac{x_1}{a_{11}} = \frac{x_2}{a_{12}} \qquad = \frac{x_4}{a_{14}}$$

$$32' \qquad \frac{x_1}{a_{12}} = \frac{x_2}{a_{22}} \qquad = \frac{x_4}{a_{34}}$$

$$33' \qquad \frac{x_1}{a_{14}} = \frac{x_2}{a_{24}} \qquad = \frac{x_4}{a_{44}}$$

$$41' \qquad \frac{x_1}{a_{11}} = \frac{x_2}{a_{12}} = \frac{x_3}{a_{13}}$$

$$42' \qquad \frac{x_1}{a_{12}} = \frac{x_2}{a_{22}} = \frac{x_3}{a_{23}}$$

$$43' \qquad \frac{x_1}{a_{13}} = \frac{x_2}{a_{23}} = \frac{x_3}{a_{33}}$$

---

§ 3. Gruppe II. 1' 2' 3' 4' und 1' 2' 4' 3' seien gleichzeitig hyperboloidisch: Aus dem Koordinatenschema

1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2'	a_{12}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
3'	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}
4'	a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{34}

ergeben sich die Bedingungen:

$$a_{14} = \mu\, a_{13}$$
$$a_{23} = \frac{1}{\mu} a_{24}$$
$$\mu\, a_{33} = \frac{1}{\mu} a_{44}$$

Die Gleichung des beiden Lagen entsprechenden Hyperboloides wird:

$$(a_{24}\, x_1 - a_{13}\, x_2)\,(\mu\, x_3 - x_4) = 0$$

resp.: $(A_{13}\, u_1 - A_{23}\, u_2)\,(\mu\, u_3 - u_4) = 0.$

Die Hyperboloide zerfallen also in ein Ebenen- bez. in ein Punktepaar:

Auf der Ebene $(a_{23}\, x_1 - a_{13}\, x_2) = 0$ liegen

33' 44'

34' 43'

auf $(\mu\, x_3 - x_4) = 0$ 11' 22'.[1])

---

1) Auf $(\mu\, x_3 - x_4)$ liegen freilich auch die Geraden 12', 21', aber während die Schnittpunkte

(11' 22')	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$
(33' 44')	c	e	f	f
(34' 43')	c	e	g	g

auf der Linie:

$$(e\, x_1 - c\, x_2) = 0$$
$$(x_3 - x_4) = 0$$

liegen, ist dies nicht mit dem Punkt (12', 21') $\frac{a}{c}$ $\frac{d}{e}$ 1 1 der Fall. T' hat die Kordinaten:

a	b	c	c
b	d	e	e
c	e	g	f
c	e	f	g

Die Hinzufügung der Bedingung, dass auch 2′ 1′ 3′ 4′ hyperboloidisch sei, ergibt, dass auch 2′ 1′ 3′ 4′ (cfr. Gruppe VI) hyperboloidisch liege. Die Koordinatenschemata wären folgende:

1′	2′	3′	4′	1′	2′	4′	3′	2′	1′	3′	4′	2′	1′	4′	3′
a	b	c	c	a	b	c	c	b	a	c	c	b	a	c	c
b	a	c	c	b	a	c	c	a	b	c	c	a	b	c	c
c	c	g	f	c	c	f	g	c	c	g	f	c	c	f	g
c	c	f	g	c	c	g	f	c	c	f	g	c	c	g	f

Die 8 Geraden 11′ 22′ 33′ 44′
21′ 12′ 43′ 34′ liegen auf dem Ebenenpaar: $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0$.

Die 8 Geraden $\overline{1}\,\overline{1}'$ $\overline{2}\,\overline{2}'$ $\overline{3}\,\overline{3}'$ $\overline{4}\,\overline{4}'$
$\overline{2}\,\overline{1}'$ $\overline{1}\,\overline{2}'$ $\overline{3}\,\overline{4}'$ $\overline{4}\,\overline{3}'$ auf
dem Punktepaar $(u_1 - u_2)(u_3 - u_4) = 0$.

Die Schnittpunkte

(11′ 22′)	b	b	c	c	liegen auf der Geraden
(12′ 21′)	a	a	c	c	$x_1 - x_2 = 0$
(33′ 44′)	c	c	f	f	$x_3 - x_4 = 0$.
(34′ 43′)	c	c	g	g	

Die 4 Ebenen

$(\overline{1}\,\overline{1}'\ \overline{2}\,\overline{2}')$ . . .	B	B	C	C
$(\overline{1}\,\overline{2}'\ \overline{2}\,\overline{1}')$ . . .	A	A	C	C
$(\overline{3}\,\overline{3}'\ \overline{4}\,\overline{4}')$ . . .	C	C	F	F
$(\overline{3}\,\overline{4}'\ \overline{4}\,\overline{3}')$ . . .	C	C	G	G

gehen durch die Gerade:

$$u_1 - u_2 = u_3 - u_4 = 0.$$

Durch Vertauschung der Indizes erhalten wir die analogen Lagenbeziehungen für die hyperboloidischen Lagen der Gruppe II. Dieselben sind:

2)

1	2	3	4	
1′	2′	3′	4′	+
1′	4′	3′	2′	—
3′	2′	1′	4′	—
3′	4′	1′	2′	+

3)

1	2	3	4	
1′	2′	3′	4′	+
1′	3′	2′	4′	—
4′	2′	3′	1′	—
4′	3′	2′	1′	+

§ 4. Sind nun zwei dieser Gruppen zugleich hyperboloidisch, so folgt daraus die dritte. Die Koordinaten sind dann:

$$\begin{matrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{matrix}$$

Dies ist die Bedingung für die perspective Lage der Tetraeder; hat a den Wert -1 so sind sie vierfach perspectiv.[1])

Es liegen auf: $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0$ die Geraden der Gruppe 1,

auf $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = 0$ die Geraden der Gruppe 2,

auf $(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0$ die Geraden der Gruppe 3.

Auf der Geraden: $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$

liegen die Schnittpunkte:

(11′, 22′)	1	1	1	1
(33′, 44′)	1	1	1	1
(12′, 21′)	a	a	1	1
(34′, 43′)	1	1	a	a

Auf: $x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = 0$ liegen:

11′ 22′	1	1	1	1
33′ 44′	1	1	1	1
13′ 31′	a	1	a	1
24′ 42′	1	a	1	a

---

1) Siehe hierüber Hess, Math. Annalen Bd. 28 pag. 212.

Auf der Geraden:

$$x_1 - x_4 = x_2 - x_3 = 0 \text{ liegen:}$$

$$\begin{array}{llllll} 11' \; 22' \\ 33' \; 44' \end{array}\Big\} \; \ldots \; 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$\begin{array}{llllll} 14' \; 41' & \ldots & a & 1 & 1 & a \\ 23' \; 32' & \ldots & 1 & a & a & 1 \end{array}$$

Durch den Punkt 1 1 1 1 gehen also ausser den 4 Graden 1 1′, 2 2′, 3 3′, 4 4′, in deren jeder sich 4 der 6 Ebenen schneiden, die drei Geraden:

$$x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = 0$$
$$x_1 - x_4 = x_2 - x_3 = 0.$$

Auf jeder liegen noch zwei Punkte. Wird a = —1, so fallen auf den drei Geraden jedesmal die zwei Punkte zusammen, und wir erhalten ein Tetraeder, dessen Ecken die 4 Perspectivitätscentra sind:

$$T_p. \quad \begin{array}{rrrr} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Man sieht, dass auch dieses Tetraeder vierfach perspectiv zu jedem der beiden ersten liegt; es ist dies das Polartetraeder für das durch die acht Punkte bestimmte Flächenbüschel 2. Grades. Die drei Tetrader haben die desmische Lage. Die 8 Punkte sind zwei zusammengehörige Punktquadrupel.[1])

Mit einer der Lagen der Gruppe II also zusammen liegt 1 also entweder dreifach oder zehnfach hyperboloidisch, jedoch erhalten wir keine eigentlichen Hyperboloide.

§ 5. Gruppe III. 1′ 2′ 3′ 4′ und 1′ 3′ 4′ 2′ seien gleichzeitig hyperboloidisch.

---

1) Siehe auch „Schröter Grundzüge" etc. § 8 pag. 47 f. f.

Aus dem Koordinatenschema:

$$\begin{array}{lllll} 1' & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3' & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ 4' & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ 2' & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{array}$$ folgt:

$$\mu\, a_{13} = a_{12},\ \mu_1\, a_{14} = a_{13},\ \mu_1\, a_{24} = \mu\, a_{33}$$

$$\frac{1}{\mu\,\mu_1}\, a_{22} = \mu\, a_{34}\ \ \frac{1}{\mu\,\mu_1}\, a_{23} = \mu_1\, a_{44},$$

so dass die Koordinaten werden, wenn $\mu = \mu_1 = 1$:

$$\begin{array}{lllll} 1' & 1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ 2' & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 3' & a_1 & a_3 & a_4 & a_2 \\ 4' & a_1 & a_4 & a_2 & a_3 \end{array}$$

Man sieht, auch 1′ 4′ 2′ 3′ ist hyperboloidisch.

Den drei Lagen entsprechen die Hyperboloide:

$$\begin{aligned} H_1 \ldots & (a_3 - a_4)\,(a_1\, x_3\, x_4 + a_2\, x_1\, x_2) \\ & + (a_4 - a_2)\,(a_1\, x_2\, x_3 + a_3\, x_1\, x_4) \\ & + (a_2 - a_3)\,(a_1\, x_2\, x_4 + a_4\, x_1\, x_3) = 0 \\ H_2 \ldots & (a_4 - a_2)\,(a_1\, x_3\, x_4 + a_3\, x_1\, x_2) \\ & + (a_2 - a_3)\,(a_1\, x_2\, x_3 + a_4\, x_1\, x_4) \\ & + (a_3 - a_4)\,(a_1\, x_2\, x_4 + a_2\, x_1\, x_3) = 0 \\ H_3 \ldots & (a_2 - a_3)\,(a_1\, x_3\, x_4 + a_4\, x_1\, x_2) \\ & + (a_3 - a_4)\,(a_1\, x_2\, x_3 + a_2\, x_1\, x_4) \\ & + (a_4 - a_2)\,(a_1\, x_2\, x_4 + a_3\, x_1\, x_3) = 0. \end{aligned}$$

Sie gehören einem Büschel an, dessen Durchdringungskurve aus der Geraden 11′ und einer Raumkurve dritter Ordnung besteht. Die Tangenten an diese Kurve sind:

In 2, die Axe des Büschels der drei Tangentialebenen an:

$$H_1 \,..\, a_2\,(a_3 - a_4)\,x_1 + a_1\,(a_4 - a_2)\,x_3 + a_1\,(a_2 - a_3)\,x_4 = 0\ \ ..\ \ \mathfrak{t}_2^1$$

$$H_2 \,..\, a_3\,(a_4 - a_2)\,x_1 + a_1\,(a_2 - a_3)\,x_3 + a_1\,(a_3 - a_4)\,x_4 = 0\ \ ..\ \ \mathfrak{t}_2^2$$

$$H_3 \,..\, a_4\,(a_2 - a_3)\,x_1 + a_1\,(a_5 - a_4)\,x_3 + a_1\,(a_4 - a_2)\,x_4 = 0\ \ ..\ \ \mathfrak{t}_2^3$$

Die Summe ist identisch 0.

Die Tangente hat die Gleichung:

$$\frac{x_1}{A} = \frac{x_3}{B} = \frac{x_4}{C}, \text{ wenn}$$

$$A = \sum_{234}^{ik} (a_i^2 - a_i\, a_k)$$

$$B = a_2^2\, a_3 + a_3^2\, a_4 + a_4^2\, a_2 - 3\, a_2\, a_3\, a_4$$

$$C = a_2\, a_3^2 + a_3\, a_4^2 + a_4\, a_2^2 - 3\, a_2\, a_3\, a_4 \text{ ist.}$$

Die Tangentialebenen in 3 sind an:

$H_1 \,..\, a_4 (a_2 - a_3) x_1 + a_1 (a_3 - a_4) x_2 + a_1 (a_4 - a_2) x_4 = 0 \;..\; t_3^1$

$H_2 \,..\, a_2 (a_3 - a_4) x_1 + a_1 (a_4 - a_2) x_2 + a_1 (a_2 - a_3) x_4 = 0 \;..\; t_3^2$

$H_3 \,..\, a_3 (a_4 - a_2) x_1 + a_1 (a_2 - a_3) x_2 + a_1 (a_3 - a_4) x_4 = 0 \;..\; t_3^3$

Die Tangente ist:

$$\frac{x_1}{A} = \frac{x_2}{B} = \frac{x_4}{C}.$$

Die Tangentialebenen in 4 sind an:

$H_1 \,..\, a_3 (a_4 - a_2) x_1 + a_1 (a_2 - a_3) x_2 + a_1 (a_3 - a_4) x_3 = 0 \;..\; t_4^1$

$H_2 \,..\, a_4 (a_2 - a_3) x_1 + a_1 (a_3 - a_4) x_2 + a_1 (a_4 - a_2) x_3 = 0 \;..\; t_4^2$

$H_3 \,..\, a_2 (a_3 - a_4) x_1 + a_1 (a_4 - a_2) x_2 + a_1 (a_2 - a_3) x_3 = 0 \;..\; t_4^3$

Die Tangente ist:

$$\frac{x_1}{A} = \frac{x_2}{B} = \frac{x_3}{C}.$$

11' . . . $x_2 = x_3 = x_4$ schneidet

$t_2^1 \; t_3^2 \; t_4^3$ in 2'' . . $a_1 \; a_2 \; a_2 \; a_2$

$t_4^1 \; t_2^2 \; t_3^3$ in 3'' . . $a_1 \; a_3 \; a_3 \; a_3$

$t_3^1 \; t_4^2 \; t_1^3$ in 4'' . . $a_1 \; a_4 \; a_4 \; a_4$

In diesen Punkten begegnen sich auch die Erzeugenden des zweiten Systems, die wir mit g_k^i bezeichnen wollen, wenn

der Index i das Hyperboloid, der Index k den Punkt angiebt. Dann schneiden sich

$\mathfrak{g}_2^1$ . . $a_2\, x_1 \qquad\qquad = a_1\, x_3 = a_1\, x_4$

$\mathfrak{g}_3^2$ . . $a_2\, x_1 = a_1\, x_2 \qquad\qquad = a_1\, x_4$

$\mathfrak{g}_4^3$ . . $a_2\, x_1 = a_1\, x_2 = a_1\, x_3$ . . . . in 2″.

$\mathfrak{g}_2^1$ ist der Schnitt der Ebenen 211′, 233′, 244′

$\mathfrak{g}_3^2$ „ „ „ „ „ 311′, 323′, 342′

$\mathfrak{g}_4^3$ „ „ „ „ „ 411′, 424′, 432′.

Ausser den drei durch 11′ gehenden Ebenen schneiden sich in a_1 a_2 a_2 a_2 die Ebenen:

$\mathfrak{t}_2^1$ $\mathfrak{t}_3^2$ $\mathfrak{t}_4^3$ 233′, 244′, 342′.

Es schneiden sich:

$\mathfrak{g}_2^1$. $a_4\, x_1 = a_1\, x_2 \qquad\qquad = a_1\, x_4$

$\mathfrak{g}_4^2$. $a_4\, x_1 \qquad\qquad = a_1\, x_3 = a_1\, x_4$

$\mathfrak{g}_2^3$. $a_4\, x_1 = a_1\, x_2 = a_1\, x_3$ . . . . in 3″.

Durch 3″ gehen die Ebenen:

$\mathfrak{t}_3^1$ $\mathfrak{t}_4^2$ $\mathfrak{t}_2^3$ 322′, 344′, 243′.

Es schneiden sich:

$\mathfrak{g}_4^1$ $a_3\, x_1 = a_1\, x_2 = a_1\, x_3$

$\mathfrak{g}_2^2$ $a_3\, x_1 = \qquad\qquad a_1\, x_3 = a_1\, x_4$

$\mathfrak{g}_3^3$ $a_3\, x_1 = a_1\, x_2 \qquad\qquad = a_1\, x_4$ . . . in 4″.

Durch 4″ gehen die Ebenen:

$\mathfrak{t}_4^1$ $\mathfrak{t}_2^2$ $\mathfrak{t}_3^3$ 422′ 433′ 234′.

Die Indices vertauschen sich cyklisch.

Das Analoge ist bei den Punkten 2′ 3′ 4′ der Fall, für die wir die Tangentialebenen und Erzeugenden mit t_k^i resp. g_k^i bezeichnen wollen.

$$t_2^1 \,.\, (a_2^2 - a_3\, a_4)\,(a_3 - a_4)\, x_1 - a_1\,(a_4 - a_2)^2\, x_3 + a_1\,(a_2 - a_3)^2\, x_4 = 0$$
$$t_2^2 \,.\, (a_4^2 - a_2\, a_3)\,(a_2 - a_3)\, x_1 - a_1\,(a_3 - a_4)^2\, x_3 + a_1\,(a_4 - a_2)^2\, x_4 = 0$$
$$t_2^3 \,.\, (a_3^2 - a_2\, a_4)\,(a_4 - a_2)\, x_1 - a_1\,(a_2 - a_3)^2\, x_3 + a_1\,(a_3 - a_4)^2\, x_4 = 0.$$

Es tritt hier der umgekehrte Cyklus (432) ein:

$$t_3^1 \,.\, (a_4^2 - a_2\, a_3)\,(a_2 - a_3)\, x_1 - a_1\,(a_3 - a_4)^2\, x_2 + a_1\,(a_4 - a_2)^2\, x_4 = 0$$
$$t_3^2 \,.\, (a_3^2 - a_2\, a_4)\,(a_4 - a_2)\, x_1 - a_1\,(a_2 - a_3)^2\, x_2 + a_1\,(a_3 - a_4)^2\, x_4 = 0$$
$$t_3^3 \,.\, (a_2^2 - a_3\, a_4)\,(a_3 - a_4)\, x_1 - a_1\,(a_4 - a_2)^2\, x_2 + a_1\,(a_2 - a_3)_2\, x_4 = 0$$
$$t_4^1 \,.\, (a_3^2 - a_4\, a_2)\,(a_4 - a_2)\, x_1 - a_1\,(a_2 - a_3)^2\, x_2 + a_1\,(a_3 - a_4)^2\, x_3 = 0$$
$$t_4^2 \,.\, (a_2^2 - a_3\, a_4)\,(a_3 - a_4)\, x_1 - a_1\,(a_4 - a_2)^2\, x_2 + a_1\,(a_2 - a_3)^2\, x_3 = 0$$
$$t_4^3 \,.\, (a_4^2 - a_2\, a_3)\,(a_2 - a_3)\, x_1 - a_1\,(a_3 - a_4)^2\, x_2 + a_1\,(a_3 - a_4)^2\, x_3 = 0.$$

$t_2^1 \; t_4^2 \; t_3^3$ gehen durch $\dfrac{a_3 - 2\,a_2 + a_4}{a_2^2 - a_3\, a_4} \; \dfrac{1}{a_1} \; \dfrac{1}{a_1} \; \dfrac{1}{a_1} \; \ldots \; 2'''.$

Durch 2''' gehen die Ebenen:

$$2'\,3'\,3 \,.\, (a_2^2 - a_3 a_4)x_1 + a_1(a_4 - a_2)x_2 \qquad\qquad - a_1(a_2 - a_3)x_4 = 0$$
$$2'\,4'\,4 \,.\, (a_2^2 - a_3 a_4)x_1 - a_1(a_2 - a_3)x_2 + a_1(a_4 - a_2)x_3 \qquad\qquad = 0$$
$$4'\,3'\,2 \,.\, (a_2^2 - a_3 a_4)x_1 \qquad\qquad - a_1(a_2 - a_3)x_3 + a_1(a_4 - a_2)x_4 = 0.$$

Dies ist der Schnittpunkt von $g_2^1 \; g_4^2 \; g_3^3$.

$t_3^1 \; t_2^2 \; t_4^3$ gehen durch $\dfrac{a_2 - 2\,a_4 + a_3}{a_4^2 - a_2\, a_4} \; \dfrac{1}{a_1} \; \dfrac{1}{a_1} \; \dfrac{1}{a_1} \; \ldots \; 3'''.$

Durch 3''' gehen die Ebenen:

$$3'\,2'\,2\,.\;(a_4^2-a_2a_3)x_1 \qquad -a_1(a_4-a_2)x_3+a_1(a_3-a_4)x_4=0$$

$$3'\,4'\,4\,.\;(a_4^2-a_2a_3)x_1-a_1(a_4-a_2)x_2+a_1(a_3-a_4)x_3 \qquad =0$$

$$2'\,4'\,3\,.\;(a_4^2-a_2a_3)x_1+a_1(a_3-a_4)x_2 \qquad -a_1(a_4-a_2)x_4=0.$$

Dies ist der Schnittpunkt von $g_3^1\ g_2^2\ g_4^3$.

$$t_4^1\ t_3^2\ t_2^3 \text{ gehen durch } \frac{a_2-2a_3+a_4}{a_3^2-a_2a_4}\ \frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_1}\ \ldots\ 4'''.$$

Durch 4''' gehen die Ebenen:

$$4'\,2'\,2\,.\;(a_3^2-a_2a_4)x_1 \qquad -a_1(a_3-a_4)x_3+a_1(a_2-a_3)x_4=0$$

$$4'\,3'\,3\,.\;(a_3^2-a_2a_4)x_1+a_1(a_2-a_4)x_2 \qquad -a_1(a_3-a_4)x_4=0$$

$$2'\,3'\,4\,.\;(a_3^2-a_2a_4)x_1-a_1(a_3-a_4)x_2+a_1(a_2-a_3)x_3 \qquad =0.$$

Dies ist der Schnittpunkt von $g_4^1\ g_3^2\ g_2^3$.

Analog sind die Lagenbeziehungen für die aus den Schnittlinien der Seitenflächen gebildeten Hyperboloide. Es liegen immer drei Tangenten, die auf drei verschiedenen Ebenen an die drei Hyperboloide gezogen sind, auf einer Ebene.

Treten an die Stelle der Lagen 8 und 9 zwei andere aus der Gruppe III, so hat man nur die Indizes zu vertauschen. Fügt man aber die Bedingung zu unserer Lage hinzu, dass auch noch zwei andere Lagen, etwa 10 und 11 hyperboloidisch sein sollen, so folgt wieder eine 10fach hyperboloidische, einfach perspective Lage der Tetraeder, mit den Koordinaten:

1'	a	1	1	1
2'	1	a	1	1
3'	1	1	1	a
4'	1	1	a	1

Es sind hyperboloidisch:

1′ 2′ 3′ 4′+	
1′ 3′ 4′ 2′+	1′ 2′ 4′ 3′—
1′ 4′ 2′ 3′+	2′ 1′ 3′ 4′—
4′ 2′ 1′ 3′+	3′ 4′ 2′ 1′—
3′ 2′ 4′ 1′+	4′ 3′ 1′ 2′—
2′ 1′ 4′ 3′+	

Es sind dies von der Lage:

1′ 2′ 4′ 3′ ausgehend dieselben Lagen wie im vorhergehenden Paragraphen.

§ 6. Gruppe IV. 1′ 2′ 3′ 4′ und 2′ 1′ 4′ 3′ seien gleichzeitig hyperboloidisch. Aus dem Koordinatenschema folgt:

2′	a_{12}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	
1′	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\mu_2 a_{14} = a_{23}$
4′	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}	$\mu_1 a_{11} = a_{22} \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} a_{33} = \mu_2 a_{44}$
3′	a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{44}	$\frac{\mu_1}{\mu_2} a_{13} = a_{24}.$

Die Koordinaten werden also, wenn $\mu = 1$:

1′	a_1	a_2	a_2	a_3
2′	a_2	a_1	a_4	a_3
3′	a_3	a_4	a_5	a_6
4′	a_4	a_3	a_6	a_5

Die Hyperboloide sind:

$$H_1 \;..\; (a_3^2 - a_4^2)(a_6 x_1 x_2 + a_2 x_3 x_4) + a_3 (a_4^2 - a_2 a_6)(x_1 x_3 + x_2 x_4)$$
$$+ a_4 (a_2 a_6 - a_3^2)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$

$$H_2 \;..\; (a_4^2 - a_3^2)(a_5 x_1 x_2 + a_1 a_3 x_4) + a_4 (a_3^2 - a_1 a_5)(x_1 x_3 + x_2 x_4)$$
$$+ a_3 (a_1 a_5 - a_4^2)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0.$$

Es ist dies die erste, und abgesehen von den analogen Fällen 17,18 die einzige nur zweifach hyperboloidische Lage der beiden Tetraeder in getrennter Lage, bei welcher die Hyperboloide nicht zerfallen.

Wird $a_5 = a_1 \quad a_6 = a_2$, so werden auch noch

17) 3′ 4′ 1′ 2′

18) 4′ 3′ 2′ 1′ hyperboloidisch.[1])

$$H_1 \ldots a_2 (a_3^2 - a_4^2)(x_1 x_2 + x_3 x_4) + a_3 (a_4^2 - a_2^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + a_4 (a_2^2 - a_3^2)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$

$$H_2 \ldots a_1 (a_4^2 - a_3^2)(x_1 x_2 + x_3 x_4) + a_4 (a_3^2 - a_1^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + a_3 (a_1^2 - a_4^2)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$

$$H_3 \ldots a_4 (a_1^2 - a_2^2)(x_1 x_2 + x_3 x_4) + a_1 (a_2^2 - a_4^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + a_2 (a_4^2 - a_1^2)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$

$$H_4 \ldots a_3 (a_2^2 - a_1^2)(x_1 x_2 + x_3 x_4) + a_2 (a_1^2 - a_3^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + a_1 (a_3^2 - a_2^2)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0.$$

$H_1 \; H_2 \; H_3 \; H_4$ gehören einem Büschel an, denn die Tangentialebenen in 1 2 3 4 1′ 2′ 3′ 4′ gehören resp. einem Ebenenbüschel an. Es ist:

$$\frac{dH_1}{dx_1} = a_2 (a_3^2 - a_4^2) x_2 + a_3 (a_4^2 - a_2^2) x_3 + a_4 (a_2^2 - a_3^2) x_4$$

$$\frac{dH_1}{dx_2} = a_2 (a_3^2 - a_4^2) x_1 + a_3 (a_4^2 - a_2^2) x_4 + a_4 (a_2^2 - a_3^2) x_3$$

$$\frac{dH_1}{dx_3} = a_2 (a_3^2 - a_4^2) x_4 + a_3 (a_4^2 - a_2^2) x_1 + a_4 (a_2^2 - a_3^2) x_2$$

$$\frac{dH_1}{dx_4} = a_2 (a_3^2 - a_4^2) x_3 + a_3 (a_4^2 - a_2^2) x_2 + x_4 (a_2^2 - a_3^2) x_1$$

1) Diese vierfache Lage behandelt Ameseder im ob. gen. Werke und erwähnt Schur am Schlusse seiner Abhandlung.

Die analogen Formeln für

$$\left.\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{matrix}\right\} \text{ entstehen durch Vertauschung } \left\{\begin{matrix} (1, 2)\ (3, 4) \\ (1, 3)\ (2, 4) \\ (1, 4)\ (2, 3) \end{matrix}\right.$$

der Indizes von a.

$$\mathfrak{t}_1^1 \ldots a_2 (a_3^2 - a_4^2)\, x_2 + a_3 (a_4^2 - a_2^2)\, x_3 + a_4 (a_2^2 - a_3^2)\, x_4 = 0$$

$$\mathfrak{t}_1^2 \ldots a_1 (a_4^2 - a_3^2)\, x_2 + a_4 (a_3^2 - a_1^2)\, x_3 + a_3 (a_1^2 - a_4^2)\, x_4 = 0$$

$$\mathfrak{t}_1^3 \ldots a_4 (a_1^2 - a_2^2)\, x_2 + a_1 (a_2^2 - a_4^2)\, x_3 + a_2 (a_4^2 - a_1^2)\, x_4 = 0$$

$$\mathfrak{t}_1^4 \ldots a_3 (a_2^2 - a_1^2)\, x_2 + a_2 (a_1^2 - a_3^2)\, x_3 + a_1 (a_3^2 - a_2^2)\, x_4 = 0.$$

Die Determinante der Koeffizienten je dreier Gleichungen hat den Wert 0.

$$\mathfrak{t}_2^1 \ldots a_2 (a_3^2 - a_4^2)\, x_1 + a_4 (a_2^2 - a_3^2)\, x_3 + a_3 (a_4^2 - a_2^2)\, x_4 = 0.$$

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{t}_2^2 \\ \mathfrak{t}_2^3 \\ \mathfrak{t}_2^4 \end{matrix}\right\} \text{ entsteht durch Vertauschung } \left\{\begin{matrix} (1, 2)\ (3, 4) \\ (1, 3)\ (2, 4) \\ (1, 4)\ (2, 3) \end{matrix}\right.$$

der Indizes von a.

$$\mathfrak{t}_3^1 \ldots a_3 (a_4^2 - a_2^2)\, x_1 + a_4 (a_2^2 - a_3^2)\, x_2 + a_2 (a_3^2 - a_4^2)\, x_4 = 0$$

$$\mathfrak{t}_4^1 \ldots a_4 (a_2^2 - a_3^2)\, x_1 + a_2 (a_3^2 - a_4^2)\, x_2 + a_3 (a_4^2 - a_2^2)\, x_3 = 0.$$

Nun gehören aber auch $\mathfrak{t}_1^1\ \mathfrak{t}_2^2\ \mathfrak{t}_3^3\ \mathfrak{t}_4^4$ einem Büschel an, denn die Gleichungen werden durch die Koordinatenwerte:

$$\begin{matrix} \mathfrak{l}' & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \mathfrak{l}'' & \dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_2} & \dfrac{1}{a_3} & \dfrac{1}{a_4} \end{matrix}$$ befriedigt.

Ausser diesen 4 Ebenen, deren Axe $\overline{1'1''}$ ist, gehen noch 6 andere Ebenen durch 1″ nämlich:

$$
\begin{array}{ll}
122' & .\ .\ a_3 x_3 = a_4 x_4 \\
133' & .\ .\ a_2 x_2 = a_4 x_4 \\
144' & .\ .\ a_2 x_2 = a_3 x_3 \\
234' & .\ .\ a_1 x_1 = a_4 x_4 \\
243' & .\ .\ a_1 x_1 = a_3 x_3 \\
432' & .\ .\ a_1 x_1 = a_2 x_2
\end{array}
$$

Die Schnittlinie von:

(122′, 133′, 144′) ist $\mathfrak{g}_1^1 \qquad a_2 x_2 = a_3 x_3 = a_4 x_4$

(122′, 234′, 243′) „ $\mathfrak{g}_2^2 \; a_1 x_1 = a_3 x_3 = a_4 x_4$

(133′, 324′, 342′) „ $\mathfrak{g}_3^3 \; a_1 x_1 = a_2 x_2 = a_4 x_4$

(144′, 423′, 432′) „ $\mathfrak{g}_4^4 \; a_1 x_1 = a_2 x_2 = a_3 x_3$

Die vier Erzeugenden des zweiten Systems

$\mathfrak{g}_1^1 \; \mathfrak{g}_2^2 \; \mathfrak{g}_3^3 \; \mathfrak{g}_4^4$ scheiden sich in $\frac{1}{a_1} \; \frac{1}{a_2} \; \frac{1}{a_3} \; \frac{1}{a_4}$.

Ferner ist (2′12, 2′34) die von 2′ ausgehende Gerade, welche die Gegenkanten $\overline{12}$, $\overline{34}$ trifft.

(3′13, 3′24) begegnet $\overline{13}$ und $\overline{24}$

(4′14, 4′23) „ $\overline{14}$ „ $\overline{23}$.

Also auch diese 3 Geraden gehen durch

$$\frac{1}{a_1} \; \frac{1}{a_2} \; \frac{1}{a_3} \; \frac{1}{a_4}.$$

Der Punkt 1″ hat also folgende Lagenbeziehung. Die Geraden:

11″, 21″, 31″, 41″ sind Erzeugende,

1 1″ ist die Axe der Tangentenebenen in 1 2 3 4,

2′ 1″, 3′ 1″, 4′ 1″ schneiden je 2 Gegenkanten von $\overline{1\ 2\ 3\ 4}$.

$t_2^1\ t_1^2\ t_4^3\ t_3^4$ gehen durch $(\frac{1}{a_2}\ \frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_4}\ \frac{1}{a_3}\ .\ .\ \overline{2''\ 2'})$

$g_2^1\ g_1^2\ g_4^3\ g_3^4$ „ „ . . . . $2''$

und endlich $2''\ 1'$ schneidet $\overline{12}\ \overline{34}$

$2''\ 3'$ „ $\overline{14}\ \overline{23}$

$2''\ 4'$ „ $\overline{13}\ \overline{24}$

Bezeichnet man $\frac{1}{a_3}\ \frac{1}{a_4}\ \frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_2}$ mit $3''$, so gehen:

$t_3^1\ t_4^2\ t_1^3\ t_2^4$ durch $\overline{3''\ 3'}$

$g_3^1\ g_4^2\ g_1^3\ g_2^4$ „ $3''$

und $3''\ 1'$ schneidet $\overline{13}$, $\overline{24}$

$3''\ 2'$ „ $\overline{14}$, $\overline{23}$

$3''\ 4'$ „ $\overline{12}$, $\overline{34}$

Ebenso sei $\frac{1}{a_4}\ \frac{1}{a_3}\ \frac{1}{a_2}\ \frac{1}{a_1}$ . . . $4''$, so gehen:

$t_4^1\ t_3^2\ t_2^3\ t_1^4$ durch $\overline{4''\ 4'}$

$g_4^1\ g_3^2\ g_2^3\ g_1^4$ „ $4''$

und $4''\ 1'$ schneidet $\overline{14}\ \overline{23}$

$4''\ 2'$ „ $\overline{13}\ \overline{24}$

$4''\ 3'$ „ $\overline{12}\ \overline{34}$

Die 4 Punkte $1''\ 2''\ 3''\ 4''$ liegen ebenfalls auf der Raumkurve und das von ihnen gebildete Tetraeder T'' ist mit T und T' vierfach hyperboloidisch.

Zu gleichen Resultaten gelangt man ausgehend von $1'\ 2'\ 3'\ 4'$.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(a_3 a_4 - a_1 a_2)(a_3^2 - a_4^2) = A_{34}$$

$$(a_3 a_4 - a_1 a_2)(a_1^2 - a_2^2) = A_{12} \quad \text{u. s. w.}$$

$$(a_i a_k - a_l a_m)(a_i^2 - a_k^2) = A_{ik}, \quad \text{so sind die}$$

Gleichungen der Tangentenebenen:

$$t_1^1 \ldots A_{34} x_2 + A_{42} x_3 + A_{23} x_4 = 0.$$

Die Gleichungen für die Tangentenebenen an die anderen Hyperboloide entstehen durch die angegebene Vertauschung aller Indizes, also z. B.:

$$t_1^2 \ldots A_{43} x_1 + A_{31} x_4 + A_{14} x_3 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Gleichungen für die Tangentenebenen an dasselbe Hyperboloid durch 2', 3', 4' durch Vertauschung der Indizes von x, also:

$$t_2^1 \ldots A_{34} x_1 + A_{42} x_4 + A_{23} x_3 = 0$$

$$t_3^1 \ldots A_{34} x_4 + A_{42} x_1 + A_{23} x_2 = 0$$

$$t_4^1 \ldots A_{34} x_3 + A_{42} x_2 + A_{23} x_1 = 0.$$

Jetzt gehören folgende Ebenen je einem Büschel an:

$$t_1^1 \ldots A_{34} x_2 + A_{42} x_3 + A_{23} x_4 = 0$$

$$t_2^2 \ldots A_{43} x_2 + A_{31} x_3 + A_{14} x_4 = 0$$

$$t_3^3 \ldots A_{12} x_2 + A_{24} x_3 + A_{41} x_4 = 0$$

$$t_4^4 \ldots A_{21} x_2 + A_{13} x_3 + A_{32} x_4 = 0.$$

Da $A_{ik} = -A_{ki}$ ist, so ist die Summe identisch Null. Sie gehen durch eine durch den Punkt 1 gehende Gerade.

Das analoge gilt von den Ebenen:

$$t_1^2 \ldots A_{43}\,x_1 + A_{31}\,x_3 + A_{14}\,x_4 = 0$$
$$t_2^1 \ldots A_{34}\,x_1 + A_{42}\,x_3 + A_{23}\,x_4 = 0$$
$$t_3^4 \ldots A_{21}\,x_1 + A_{13}\,x_3 + A_{32}\,x_4 = 0$$
$$t_4^3 \ldots A_{12}\,x_1 + A_{24}\,x_3 + A_{41}\,x_4 = 0$$

Die Gerade geht durch 2.

Ebenso gehen $t_1^3\ t_2^4\ t_3^1\ t_4^2$ durch eine durch 3 gehende Gerade, und $t_1^4\ t_2^3\ t_3^2\ t_4^1$ durch eine durch 4 gehende Gerade.

Die sechs Ebenen

$$1'2'2\ (a_3^2-a_4^2)x_1 \qquad -(a_1a_3-a_2a_4)x_3+(a_1a_4-a_2a_3)x_4=0$$
$$1'3'3\ (a_4^2-a_2^2)x_1+(a_1a_2-a_3a_4)x_2 \qquad -(a_1a_4-a_2a_3)x_4=0$$
$$1'4'4\ (a_2^2-a_3^2)x_1-(a_1a_2-a_3a_4)x_2+(a_1a_3-a_2a_4)x_3 \qquad =0$$
$$2'3'4\ (a_4^2-a_1^2)x_1-(a_1a_2-a_3a_4)x_2+(a_1a_3-a_2x_4)x_3 \qquad =0$$
$$2'4'3\ (a_1^2-a_3^2)x_1+(a_1a_2-a_3a_4)x_2 \qquad -(a_1a_4-a_2a_3)x_4=0$$
$$3'4'2\ (a_1^2-a_2^2)x_1 \qquad -(a_1a_3-a_2a_4)x_3+(a_1a_4-a_2a_3)x_4=0$$

gehen durch den Punkt 1‴

$$2\,.\ \frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2}{a_1a_2-a_3a_4}\,.\ \frac{a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_1a_3-a_2a_4}\,.\ \frac{a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4^2}{a_1a_4-a_2a_3}\,.$$

In diesem Punkte schneiden sich:

$$(1'\,2'\,2,\ 1'\,3'\,3,\ 1'\,4'\,4) = g_1^1$$
$$(2'\,1'\,2,\ 2'\,4'\,3,\ 2'\,3'\,4) = g_2^2$$
$$(3'\,1'\,3,\ 3'\,2'\,4,\ 3'\,4'\,2) = g_3^3$$
$$(4'\,1'\,4,\ 4'\,2'\,3,\ 4'\,3'\,2) = g_4^4$$

(2 1′ 2′, 2 3′ 4′) schneidet $\overline{1' 2'}$ $\overline{3' 4'}$
(3 1′ 3′, 3 2′ 4′) „ $\overline{1' 3'}$ $\overline{2' 4'}$
(4 1′ 4′, 4 2′ 3′) „ $\overline{1' 4'}$ $\overline{2' 3'}$

Es wiederholt sich also alles wie im besprochenenen Falle. Wir erhalten ein viertes Tetraeder T''', welches mit den anderen dreien vierfach hyperboloidisch liegt. T''' hat die Koordinaten, wenn

$$2 \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{a_1 a_2 - a_3 a_4} \quad \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{a_1 a_3 - a_2 a_4} \quad \frac{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}{a_1 a_4 - a_2 a_3}$$

bezeichnet wird mit:

2	A_1	A_2	A_3	. . . 1‴
A_1	2	A_3	A_2	. . . 2‴
A_2	A_3	2	A_1	. . . 3‴
A_3	A_2	A_1	2	. . . 4‴

Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken von

T und T'
T „ T''
T'' „ T''' liegen auf denselben vier Hyperboloiden.

Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken von

T und T'''
T''' „ T''
T'' „ T' auf vier anderen, demselben Büschel zugehörigen Hyperboloiden.

Gleichmässig verhalten sich die vier Tetraeder zueinander, welche zu diesen vieren vierfach perspectiv liegen. Diese sind:

T_1	-1	1	1	1
	1	-1	1	1
	1	1	-1	1
	1	1	1	-1

$$T_1' \quad . \quad \begin{array}{cccc} s-2a_1, & s-2a_2, & s-2a_3, & s-2a_4 \\ s-2a_2, & s-2a_1, & s-2a_4, & s-2a_3 \\ s-2a_3, & s-2a_4, & s-2a_1, & s-2a_2 \\ s-2a_4, & s-2a_3, & s-2a_2, & s-2a_1 \end{array}$$

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Versteht man überhaupt unter s die Summe von $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, so stellt obiges Schema die Koordinaten für ein Tetraeder dar, das vierfach perspectiv liegt zu einem Tetraeder, dessen Ecken Koordinaten von der Form T hat. Versteht man also unter s:

1) die Summe: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}$, so ist das Schema die Koordinaten für T_1'',

2) die Summe $2 + A_1 + A_2 + A_3$, so bedeutet es die Koordinaten von den Ecken des Tetraeders T_1'''. Man erhält die Koordinaten einfach durch Koordinatentransformation.

Das Polartetraeder endlich:

$$T_p \quad \begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

ist in desmischer Lage

mit T und T_1
T' „ T_1'
T'' „ T_1''
T''' „ T_1'''

§ 7. Gruppe V. Es bleibt uns noch zu untersuchen, ob wir neue Lagen finden, wenn 1′ 2′ 3′ 4′ zugleich hyperboloidisch ist mit einer Lage aus der Gruppe V, etwa mit 2′ 4′ 1′ 3′. Aus den Koordinaten:

$$\begin{array}{lllll} 2' & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 4' & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ 1' & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3' & a_{13} & a_{23} & a_{34} & a_{44} \end{array}$$

folgt

$$\mu\, a_{14} = a_{22} \qquad \mu_1\, a_{12} = \mu\, a_{34}$$
$$\mu_1\, a_{11} = a_{23} \qquad \mu'\, a_{24} = \mu\, a_{44}$$
$$\mu_2\, a_{13} = a_{24} \qquad \mu_1\, a_{14} = \mu_2\, a_{34}$$ so dass die Koordinatenwerte werden, wenn $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1$:

1'	a_1	a_2	a_3	a_4
2'	a_2	a_4	a_1	a_3
3'	a_3	a_1	a_4	a_2
4'	a_4	a_3	a_2	a_1

Aus diesen Koordinatenwerten folgt, dass auch 3' 1' 4' 2' und 4' 3' 2' 1' (Gruppe IV) hyperboloidisch sind. Wir erhalten wieder eine vierfach hyperboloidische Lage,[1]) jedoch sind die Lagenverhältnisse nicht so einfach wie im § 6. Auch die Gleichungen für die Hyperboloide sind komplizierter. Sie sind:

$$H_1 \;\ldots\; a_2\,(a_3^2 - a_4\,a_1)\,(x_1\,x_2 + x_3\,x_4)$$
$$+\; a_3\,(a_1\,a_4 - a_2^2)\,(x_1\,x_3 + x_2\,x_4)$$
$$+\; (a_2^2 - a_3^2)\,(a_1\,x_1\,x_4 + a_4\,x_2\,x_3) = 0$$

$H_2\; H_3\; H_4$ entstehen durch wiederholte cyklische Vertauschungen (1 2 3 4) der Indizes von a.

Es würde zu weit führen, den wesentlichen Unterschied zu untersuchen, zumal die analytische Behandlung sehr kompliziert ist. Setzen wir diese Lagen mit einer aus den den vorangegangenen Gruppen hyperboloidisch, so tritt die 10fach hyperboloidische Lage ein.

1) Diese ist von Schröter und Schur behandelt worden.

II. Spezielle Lagen.

§ 8. T' sei T eingeschrieben.[1] **Gruppe I.** Dies ist wiederum auf 24 Weisen möglich, die sich in 5 Gruppen gliedern. Die erste Gruppe enthält nur die Lage 1' in $\bar{1}$, 2' in $\bar{2}$, 3' in $\bar{3}$, 4 in $\bar{4}$. Die Koordinaten der Ecken von T' sind:

$$\begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{matrix}$$

Die Anzahl der möglichen hyperboloidischen Lagen beschränkt sich, wegen $a_{ik} = a_{ki}$ und weil nur $a_{ii} = 0$ ist auf 10; nämlich auf die Lagen 2-7 (bei denen zwei Elemente fest bleiben) und 16-18 (die positiven, bei denen kein Element seinen Platz behält). Mit den Lagen 2-7 erhalten wir wieder Ebenen- resp. Punktpaare, mit den Lagen 16-18 einen besonderen Fall der vierfach hyperboloidischen Lage. Die Koordinaten von T sind dann:

$$\begin{matrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & 0 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & 0 \end{matrix}$$

---

1) Siehe P. Muth, „Ueber Tetraederpaare." Zeitschrift für Mathematik. 37. Jahrgang, Heft 2, pag. 116.

$$H_1 \dots a_2 (a_3^2 - a_4^2)(x_1 x_2 + x_3 x_4)$$
$$+ a_3 (a_4^2 - a_2^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4)$$
$$+ a_4 (a_2^2 - a_3^2)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$
$$H_2 \dots a_3 (x_1 x_3 + x_2 x_4) - a_4 (x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$
$$H_3 \dots a_4 (x_1 x_4 + x_2 x_3) - a_2 (x_1 x_2 + x_3 x_4) = 0$$
$$H_4 \dots a_2 (x_1 x_2 + x_3 x_4) - a_3 (x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0$$

$H_1 + H_3 = H_4$, also gehören sie einem Büschel an, zu demselben gehört auch H_1, denn es wird:

$$\mathfrak{t}_1^1 \dots a_2 (a_3^2 - a_4^2)\, x_2 + (a_4^2 - a_2^2)\, a_3 x_3 + (a_2^2 - a_3^2)\, a_4 x_4 = 0$$
$$\mathfrak{t}_1^2 \dots a_3 x_3 - a_4 x_4 = 0$$
$$\mathfrak{t}_1^3 \dots a_2 x_2 - a_4 x_4 = 0$$
$$\mathfrak{t}_1^4 \dots a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$$

Diese Ebenen enthalten die Gerade, d. i. die Tangente an die Kurve: $a_2 x_2 = a_3 x_3 = a_4 x_4$, diese ist zugleich die Erzeugende des zweiten Systems für H_1, durch 1., denn sie ist der Schnitt der Ebenen 122', 133', 144'.

Die anderen Tangenten sind:

$$\mathfrak{g}_2^1 \dots a_2 x_1 = a_4 x_3 = a_3 x_4$$
$$\mathfrak{g}_3^1 \dots a_3 x_1 = a_4 x_2 = a_1 x_4$$
$$\mathfrak{g}_4^1 \dots a_4 x_1 = a_3 x_2 = a_1 x_4.$$

Sie treffen die Ebenen, resp. $\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4}$ in den Punkten:

0	$\frac{1}{a_2}$	$\frac{1}{a_3}$	$\frac{1}{a_4}$	1''
$\frac{1}{a_2}$	0	$\frac{1}{a_4}$	$\frac{1}{a_3}$	2''
$\frac{1}{a_3}$	$\frac{1}{a_4}$	0	$\frac{1}{a_2}$	3''
$\frac{1}{a_4}$	$\frac{1}{a_3}$	$\frac{1}{a_2}$	0	4''

1″ 2″ 3″ 4″ bilden ein T eingeschriebener Tetraeder T''', welches ebenfalls vierfach hyperboloidisch mit T liegt und dasselbe Hyperboloide H'_1 liefert, wie T'' mit T, denn die Erzeugenden des zweiten Systems zu H_1 gehen, wie gezeigt, durch 1″ 2″ 3″ 4″.

H'_2 H'_3 H'_4 haben die analogen Gleichungen mit den reziproken Werten $\frac{1}{a_2}$ $\frac{1}{a_3}$ $\frac{1}{a_4}$.

Es ist aber nicht das in § 6 mit T″ bezeichnete Tetraeder, denn die Ebenen:

$2\ 3\ 4' = \bar{4}$

$3\ 4\ 2' = \bar{2}$ gehen durch 1.

$4\ 2\ 3' = \bar{3}$

und die Erzeugenden sind:

$\mathfrak{g}_2^2 \qquad x_3 = x_4 = 0 \ . \ . \ . \ \overline{12}$

$\mathfrak{g}_3^3 \qquad x_4 = x_2 = 0 \ . \ . \ . \ \overline{13}$

$\mathfrak{g}_4^4 \qquad x_2 = x_3 = 0 \ . \ . \ . \ \overline{14}$

Das Gleiche gilt von den anderen Ecken.

Es liegen also auf jedem Hyperboloid je 2 Kanten des Tetraeders, auf H_3 $\overline{12}$ und $\overline{34}$, auf H_2 $\overline{13}$ und $\overline{24}$, auf H_3 $\overline{14}$ und $\overline{23}$.

Die Punkte 1″ 2″ 3″ 4″ liegen nicht auf der Durchdringungskurve, sondern nur auf H_1.

$$t_1^1 = \frac{a_3^2 - a_4^2}{a_2} x_2 + \frac{a_4^2 - a_2^2}{a_3} x_3 + \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_4} x_4 = 0$$

$$t_2^1 = \frac{a_4^2 - a_3^2}{a_2} x_1 + \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_4} x_4 + \frac{a_1^2 - a_4^2}{a_3} x_3 = 0$$

$$t_3^1 = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_4} x_4 + \frac{a_2^2 - a_4^2}{a_1} x_1 + \frac{a_4^2 - a_1^2}{a_2} x_2 = 0$$

$$t_4^1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_3} x_3 + \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_2} x_2 + \frac{a_3^2 - a_2^2}{a_1} x_1 = 0$$

Die übrigen Tangentialebenen durch 1′ sind:

$$t_1^2 \ldots \frac{a_3^2 - a_4^2}{a_2 a_3 a_4} x_1 \qquad - \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_4}{a_4} = 0$$

$$t_1^3 \ldots \frac{a_4^2 - a_2^2}{a_2 a_3 a_4} x_1 + \frac{x_2}{a_2} \qquad - \frac{x_4}{a_4} = 0$$

$$t_1^4 \ldots \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2 a_3 a_4} x_1 - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} \qquad = 0$$

Die Tangente ist:

$$\frac{\frac{x_3}{a_3} - \frac{x_4}{a_4}}{a_3^2 - a_4^2} = \frac{\frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}}{a_2^2 - a_3^2} = \frac{\frac{x_4}{x_4} - \frac{x_2}{a_2}}{a_4^2 - a_2^2}$$

$$t_2^2 \ldots \frac{a_3^2 - a_4^2}{a_2 a_3 a_4} x_2 + \frac{x_3}{a_4} - \frac{x_4}{a_3} \qquad = 0$$

$$t_2^3 \ldots \frac{a_4^2 - a_2^2}{a_2 a_3 a_4} x_2 - \frac{x_3}{a_4} \qquad + \frac{x_1}{a_2} = 0$$

$$t_2^4 \ldots \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2 a_3 a_4} x_2 \qquad + \frac{x_4}{a_3} - \frac{x_1}{a_2} = 0$$

Die Tangente ist:

$$\frac{\frac{x_3}{a_4} - \frac{x_4}{a_3}}{a_4^2 - a_3^2} = \frac{\frac{x_4}{a_3} - \frac{x_1}{a_2}}{a_3^2 - a_2^2} = \frac{\frac{x_1}{a_2} - \frac{x_3}{a_4}}{a_2^2 - a_4^2}$$

Die Tangente in 3′ ist:

$$\frac{\frac{x_1}{a_3} - \frac{x_2}{a_4}}{a_3^2 - a_4^2} = \frac{\frac{x_2}{a_4} - \frac{x_3}{a_2}}{a_4^2 - a_2^2} = \frac{\frac{x_3}{a_2} - \frac{x_1}{a_3}}{a_2^2 - a_3^2}$$

Die Tangente in 4′ ist:

$$\frac{\frac{x_2}{a_3} - \frac{x_1}{a_4}}{a_3^2 - a_4^2} = \frac{\frac{x_1}{a_4} - \frac{x_3}{a_2}}{a_4^2 - a_2^2} = \frac{\frac{x_3}{a_2} - \frac{x_2}{a_3}}{a_2^2 - a_3^2}$$

Die Gleichungen der 6 Ebenen werden:

$$1'2'2 \quad (a_3^2 - a_4^2)\, x_1 \qquad + a_2 a_4 x_3 - a_2 a_3 x_4 = 0$$

$$1'3'3 \quad (a_4^2 - a_2^2)\, x_1 - a_3 a_4 x_2 \qquad + a_2 a_3 x_4 = 0$$

$$1'4'4 \quad (a_2^2 - a_3^2)\, x_1 + a_3 a_4 x_2 - a_2 a_4 x_3$$

$$2'3'4 \quad a_4^2\, x_1 + a_3 a_4 x_2 - a_2 a_4 x_3$$

$$2'4'3 \quad -a_3^2\, x_1 - a_3 a_4 x_2 \qquad + a_2 a_3 x_4 = 0$$

$$3'4'2 \quad -a_2^2\, x_1 \qquad + a_2 a_4 x_3 - a_2 a_3 x_4 = 0$$

Sie gehen alle durch den Punkt:

$$1''' \ldots 2a_2 a_3 a_4 \,.\, a_2(a_3^2 + a_4^2 - a_2^2) \,.\, a_3(a_2^2 - a_3^2 + a_4^2) \,.\, a_4(a_2^2 + a_3^2 - a_4^2).$$

Ebenso erhält man:

$$2''' \ldots a_2(a_3^2 + a_4^2 - a_2^2) \,.\, 2a_2 a_3 a_4 \,.\, a_4(a_2^2 + a_3^2 - a_4^2) \,.\, a_3(a_2^2 - a_3^2 + a_4^2)$$

$$3''' \ldots a_3(a_2^2 - a_3^2 + a_4^2) \,.\, a_4(a_2^2 + a_3^2 - a_4^2) \,.\, 2a_2 a_3 a_4 \,.\, a_2(a_3^2 + a_4^2 - a_2^2)$$

$$4''' \ldots a_4(a_2^2 + a_3^2 - a_4^2) \,.\, a_3(a_2^2 - a_3^2 + a_4^2) \,.\, a_2(a_3^2 + a_4^2 - a_2^2) \,.\, 2a_2 a_3 a_4.$$

§ 9. T und T′ seien einander umgeschrieben; dafür lautet die analytische Bedingung $a_{ik} = -a_{ki}$. Die Koordinaten von T' werden dann:

$$\begin{matrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & 0 & a_4 & a_3 \\ -a_3 & -a_4 & 0 & a_2 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & 0 \end{matrix}$$

1′ 2′ 3′ 4′ ist nicht mehr hyperboloidisch, wohl aber die übrigen drei:

2′	1′	4′	3′		3′	4′	1′	2′		4′	3′	2′	1′
$-a_2$	0	a_4	a_3		a_3	a_4	0	$-a_2$		a_4	a_3	a_2	0
0	a_2	a_3	a_4		a_4	a_3	a_3	0		a_3	a_4	0	$-a_2$
a_4	a_3	a_2	0		0	a_2	a_3	a_4		a_2	0	$-a_4$	$-a_3$
a_3	a_4	0	$-a_2$		$-a_2$	0	a_4	a_3		0	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$.

$$H_2 \ldots a_3 (x_1 x_3 + x_2 x_4) - a_4 (x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$
$$H_3 \ldots a_2 (x_1 x_2 + x_3 x_4) + a_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0$$
$$H_4 \ldots a_3 (x_1 a_3 - x_2 x_4) - a_2 (x_1 x_2 + x_3 x_4) = 0$$

H_2 H_3 H_4 gehören nicht einem Büschel an.

Die Ecken und Kanten von T und T' liegen auf den Hyperboloiden, und zwar auf

H_2	$\overline{12}$,	$\overline{34}$,	$\overline{1'2'}$,	$\overline{3'4'}$
H_3	$\overline{13}$,	$\overline{24}$,	$\overline{1'3'}$,	$\overline{2'4'}$
H_4	$\overline{14}$,	$\overline{23}$,	$\overline{1'4'}$,	$\overline{2'3'}$

denn z. B. die Gleichungen für $\overline{3'4'}$ d. i.

$\overline{1}'$ $\quad a_2 x_2 - a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$

$\overline{2}'$ $\quad a_2 x_1 - a_4 a_3 + a_3 x_4 = 0$ in H_2 eingesetzt

ergeben den Wert 0.

Da 1′ sowohl auf $\overline{1}$ als auf $\overline{2}'$ liegt
2 „ „ $\overline{1}$ „ „ $\overline{2}'$ „

so ist $1'2 = \overline{1}\,\overline{2}'$. Die von den Schnittlinien entsprechender Flächen gebildeten Hyperboloide sind also dieselben wie die behandelten.

Analytisch ergiebt sich dies folgendermassen. $\overline{1}\,\overline{2}'$ hat die Gleichungen:

$\overline{1} \ldots \quad x_1 = 0$

$\overline{2} \ldots a_2 x_1 - a_4 x_3 + a_3 x_4 = 0$ oder

$x_1 = 0 \quad x_3 : x_4 = a_3 : a_4$ d. i. $\overline{12'}$.

$\overline{1}'$ hat die Ebenenkoordinaten:

$\overline{1}'$	0	a_2	$-a_3$	a_4
$\overline{2}'$ . . .	$-a_2$	0	a_4	$-a_3$
$\overline{3}'$ . . .	a_3	$-a_4$	0	$+a_2$
$\overline{4}'$ . . .	$-a_4$	a_3	$-a_2$	0

$$H_2 \;\ldots\; a_3(u_1 u_3 + u_2 u_4) + a_4(u_1 u_4 + u_2 u_3) = 0$$
$$H_3 \;\ldots\; a_4(u_1 u_4 - u_2 u_3) + a_2(u_1 u_2 + u_3 u_4) = 0$$
$$H_4 \;\ldots\; a_2(u_1 u_2 - u_3 u_4) + a_3(u_1 u_3 - u_2 u_4) = 0$$

§ 10. Setzen wir aber $a_{12} = a_{24} = a_{13} = a_{34} = 1$ und $a_{14} = -a_{13} = a$ und endlich $a_{ik} = -a_{ki}$, so sind auch 4′ 2′ 3′ 1′ und 1′ 3′ 2′ 4′ hyperloidisch, wie aus dem Koordinatenschema zu sehen.

4′ . . .	$-a$	-1	-1	0	1′ . . .	0	1	-1	a
2′ . . .	-1	0	$-a$	$+1$	3′ . . .	1	a	0	1
3′ . . .	-1	$-a$	0	-1	2′ . . .	-1	0	$-a$	1
1′ . . .	0	$+1$	-1	a	4′ . . .	a	1	1	0

$$H_2 \;\ldots\; (x_1 x_3 - x_2 x_4) + a(x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0$$
$$H_3 \;\ldots\; (x_1 x_2 + x_3 x_4) - a(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$
$$H_4 \;\ldots\; (x_1 x_2 - x_3 x_4) - (x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0$$
$$H_5 \;\ldots\; (x_1 x_2 + x_3 x_4) - (x_1 x_3 - x_2 x_4) - 2a x_1 x_4 = 0$$
$$H_6 \;\ldots\; (x_1 x_2 + x_3 x_4) + (x_1 x_3 - x_2 x_4) - 2a x_2 x_3 = 0$$

$$H_5 + H_6 = H_3$$
$$H_5 - H_6 = H_2$$

H_2 H_3 H_5 H_6 gehören einem Büschel an, dagegen nicht H_4.

Die Tangenten an der Durchdringungskurve sind:

$$\begin{array}{rcccl} & x_2 = - & x_3 = a x_4 & & \\ -\,x_1 & & = -a x_3 = & x_4 & \\ x_1 = a x_2 & & = & x_4 & \\ a x_1 = & x_2 = & x_3 & & \end{array}$$

Sie treffen die resp. Ebenen $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}$ in

1''	0	1	-1	$\frac{1}{a}$
2''	-1	0	$-\frac{1}{a}$	1
3''	1	$-\frac{1}{a}$	0	1
4''	$-\frac{1}{a}$	-1	-1	0

T'' liegt nicht hyperboloidisch zu T.

Die Tangenten durch 1' 2' 3' 4' sind:

durch 1' $\quad (a^2 - 1)x_1 = a x_3 + x_4 = a x_2 - x_4$

„ 2' $\quad (a^2 - 1)x_2 = a x_4 + x_3 = a x_1 - x_3$

„ 3' $\quad (a^2 - 1)x_3 = a x_1 - x_2 = a x_4 + x_2$

„ 4' $\quad (a^2 - 1)x_4 = a x_2 - x_1 = a x_3 + x_1$

Die Ebenen $\overline{1'}\ \overline{2'}\ \overline{3'}\ \overline{4'}$ sind:

$$- x_2 + x_3 + a x_4 = 0$$
$$+ x_1 - a x_3 - x_4 = 0$$
$$- x_1 + a x_2 - x_4 = 0$$
$$- a x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Sie werden von den Tangenten getroffen in

1'''	a	$a^2 - 1$	$a^2 - 1$	0
2'''	$a^2 - 1$	a	0	$a^2 - 1$
3'''	$a^2 - 1$	0	a	$-(a^2 - 1)$
4'''	0	$(a^2 - 2)$	$-(a^2 - 1)$	a

T''' ist eingeschrieben T aber in der Lage $\frac{1}{4'''}\ \frac{2}{3'''}\ \frac{3}{2'''}\ \frac{4}{1'''}$ und liegt mit T vierfach hyperbolidisch, die Punkte liegen auf H_4. Da nun die anderen Erzeugenden zu H_4 die Kanten sind, so müssen sie auf den Geraden:

14' 23' 32' 41' liegen.

Endlich liegen noch

$$1' \ldots 0 \quad 1 \quad -1 \quad a$$

$$1'' \ldots 0 \quad 1 \quad -1 \quad \frac{1}{a} \quad \text{auf}$$

$$\overline{1'''} \ldots [a^3 - 2a(a^2 - 1)]\,x_1 - [2(a^2 - 1)^3 - a^2(a^2 - 1)]\,x_2 - $$
$$- [2(a^2 - 1)^3 - a^2(a^2 - 1)]\,x_4 = 0.$$

Wiederum ist:

T	und	T'	ein- und umgeschrieben
T'	„	T'''	„ „ „
T'''	„	T''	„ „ „
T''	„	T	„ „ „

Ausserdem ist T''' eingeschrieben T
T'' „ T'

Es liegen	1	4′	1‴	4″	auf einer Geraden,
	2	3′	2‴	3″	„ „ „
	3	2′	3‴	2″	„ „ „
	4	1′	4‴	1″	„ „ „

den vier Erzeugenden von H_4.

Die anderen Erzeugenden von H_2 H_3 H_4 sind die Kanten von T und T', nämlich

zu H_5 die Kanten $\overline{14}$ $\overline{1'4'}$ und die Tangenten an die Kurve durch 2, 3, 2′, 3.

zu H_6 die Kanten $\overline{23}$ $\overline{2'3,}$ und die Tangenten an die Kurve durch 1, 4, 1“ 4′.

Es liegen die Punkte: 1 2′ 1″ 2 auf einer Ebene und es schneiden sich:

$(12' \; 21'')$ in $0 \quad 0 \quad -a \quad 1$ auf $\overline{34}$

$(12'' \; 21')$ „ $0 \quad 0 \quad -\frac{1}{a} \quad 1$ „ $\overline{34}$

$(13' \; 31'')$ „ $0 \quad a \quad 0 \quad 1$ „ $\overline{34}$

$(13'' \; 31')$ „ $0 \quad \frac{1}{a} \quad 0 \quad 1$ „ $\overline{24}$

Die vierten harmonischen Punkte zu den Eckpunkten und den ebengenannten mögen mit dem Zeichen - angedeutet werden, z. B.

-(12′ 21″) . . . . 0 0 a 1

Es trifft

1	4′	4″	1‴	die Kante	$\overline{23}$	in	0	1	1	0
1′	4	4‴	1″	„	„	„	0	-1	1	0
2	3′	3″	2‴	„	$\overline{14}$	„	-1	0	0	1
2′	3‴	3	2″	„	„	„	1	0	0	1

(24′, 42″) schneiden sich in	a	0	1	0	auf	$\overline{24}$
(24″, 42′) „ „ „	$\frac{1}{a}$	0	1	0	„	$\overline{24}$
(34′, 43″) „ „ „	a	1	0	0	„	$\overline{12}$
(34″, 43′) „ „ „	$\frac{1}{a}$	1	0	0	„	$\overline{12}$

Die Gleichungen der von den Schnittflächen gebildeten Hyperboloide sind, in Ebenenkoordinaten:

$$H_2 \ldots (u_1 u_3 - u_2 u_4) - a(u_1 u_4 - u_3 u_2) = 0$$
$$H_3 \ldots (u_1 u_2 + u_3 u_4) + a(u_1 u_4 + u_3 u_2) = 0$$
$$H_4 \ldots -(u_1 u_2 - u_3 u_4) + (u_1 u_3 + u_2 u_4) = 0$$

Diese sind dieselben wie die behandelten.

$$H_5' \ldots (u_1 u_2 + u_3 u_4) - (u_1 u_3 - u_2 u_4) + 2a\, u_1 u_4 = 0$$
$$H_6' \ldots (u_1 u_2 + u_3 u_4) + (u_1 u_3 - u_2 u_4) + 2a\, u_2 u_3 = 0$$
$$H_5' + H_6' = H_3$$
$$H_6' - H_5' = H_2$$

Die Gleichungen der letzten beiden lauten in Punktkoordinaten:

$$H_5' \ldots 2a(x_2^2 - x_3^2) - (x_1 x_2 + x_3 x_4) + (x_1 x_3 - x_2 x_4) = 0$$
$$H_6' \ldots 2a(x_1^2 - x_4^2) - (x_1 x_2 + x_3 x_4) - (x_1 x_3 - x_2 x_4) = 0$$

Man erhält dieselben beiden Tetraeder T'' und T''' auf analoge Weise.

Die Tangenten sind:

auf	$\overline{1}$ . .	$u_2 = - u_3 = - u_4$
	$\overline{2}$ . .	$- u_1 = a u_3 = - u_4$
	$\overline{3}$ . .	$a_1 = - a u_2 = u_4$
	$\overline{4}$ . .	$- a u_1 = u_2 = u_3$

Dies sind aber Verbindungen obiger Punkte; nämlich die Tangenden sind:

auf	$\overline{1}$	$(\overline{14'}, \overline{23})$,	$-(\overline{13'}, \overline{31''})$,	$-(\overline{12''}, \overline{21'})$
	$\overline{2}$	$(\overline{23'}, \overline{14})$,	$(\overline{24''}, \overline{42'})$,	$-(\overline{12'}, \overline{21''})$
	$\overline{3}$	$(\overline{34''}, \overline{43'})$,	$(\overline{23'}, \overline{14})$,	$-(\overline{13'}, \overline{31''})$
	$\overline{4}$	$(\overline{34'}, \overline{43''})$,	$(\overline{14'}, \overline{23})$,	$(\overline{24'}, \overline{42'})$

Diese vier Geraden sind auch die anderen auf den Ebenen liegenden Erzeugenden zu H'_5, H'_6.

Das Analoge gilt auch für T'.

Noch speziellere Annahme der Koordinatenwerte ergiebt Degenerieren der Hyberboloide.

III. Spezielle eingeschriebene Lage. (Gruppe II.)

§ 11. 1′ 2′ 3′ 4′ sei 1 2 3 4 eingeschrieben nach Art der Gruppe II, z. B.

$$1' \text{ in } \overline{1} \quad 2' \text{ in } \overline{2}$$
$$3' \text{ in } \overline{3} \quad 4' \text{ in } \overline{4}$$

Die Koordinaten sind:

$$\begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ a_{14} & a_{24} & 0 & a_{44} \end{matrix}$$

Möglich sind folgende 10 hyperboloidische Lagen.

I.	1) 1′ 2′ 3′ 4′ +	IV.	16) 2′ 1′ 4′ 3′ +
II.	2) 2′ 1′ 3′ 4′ −	V.	19) 3′ 4′ 2′ 1′ −
	3) 1′ 2′ 4′ 3′ −		20) 4′ 3′ 1′ 2′ −
III.	8) 1′ 3′ 4′ 2′ +		10) 3′ 2′ 4′ 1′ +
	9) 1′ 4′ 2′ 3′ +		11) 4′ 2′ 1′ 3′ +

Mit 2) und 3) erhalten wir keine neuen Lagen; mit 8) und 9) einen speziellen Fall der dreifach hyperboloidischen Lagen mit den Koordinaten.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 & a_2 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & a_2 \end{matrix}$$

$H_1 \ldots a_1 (x_2 x_4 + a_2 x_1 x_3) - a_2 (x_2 x_3 + a_1 x_1 x_4) - (a_1 - a_2) x_3 x_4 = 0$

$H_2 \ldots a_1 (x_2 x_3 + a_2 x_1 x_4) - a_2 (x_3 x_4 + a_1 x_1 x_2) - (a_1 - a_2) x_2 x_4 = 0$

$H_3 \ldots a_1 (x_3 x_4 + a_2 x_1 x_2) - a_2 (x_3 x_4 + x_1 x_1 x_3) - (a_1 - a_2) x_2 x_3 = 0$

Die Durchdringungskurve besteht aus $\overline{11'}$ und einer Raumkurve dritten Grades, welche die Tangenten hat:

$$\text{in } 2 \ldots \quad x_1 = \frac{a_1 a_2 + (a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2^2} x_3 = \frac{a_1 a_2 + (a_1 - a_2)^2}{a_1^2 a_2} x_4$$

$$\text{in } 3 \ldots \quad x_1 = \frac{a_1 a_2 + (a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2^2} x_2 = \frac{a_1 a_2 + (a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2^2} x_4$$

$$\text{in } 4 \ldots \quad x_1 = \frac{a_1 a_2 + (a_1 - a_2)^2}{a_1^2 a_2} x_2 = \frac{a_1 a_1 + (a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2^2} x_4$$

Auf H_1 liegt die Kante $\overline{12}$ und

$$g_3^1 \quad a_2 x_1 = x_2 = x_4$$

$$g_4^1 \quad a_1 x_1 = x_2 = x_4$$

Auf H_2 die Kante $\overline{13}$ und

$$g_2^2 \quad a_1 x_1 = x_3 = x_4$$

$$g_4^2 \quad a_2 x_1 = x_2 = x_3$$

Auf H_3 die Kante $\overline{14}$ und

$$g_2^3 \quad a_2 x_1 = x_3 = x_4$$

$$g_3^3 \quad a_1 x_1 = x_2 = x_3$$

Die Kanten von T^v liegen nicht auf den Hyperboloiden, denn es ist:

$$12' \quad \begin{aligned} a_1 x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ a_{\cdot} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad g_1^1 \quad \begin{aligned} a_2 x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ a_1 x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_2^2\ \mathfrak{g}_3^3\ \mathfrak{g}_4^4$ treffen sich in $\frac{1}{a_1}\ 1\ 1\ 1$

$\mathfrak{g}_2^3\ \mathfrak{g}_3^1\ \mathfrak{g}_4^2$ " " " $\frac{1}{a_2}\ 1\ 1\ 1$

$\mathfrak{g}_2^1\ \mathfrak{g}_3^2\ \mathfrak{g}_4^3$ " " " $1\ 0\ 0\ 0 = 1'$.

Die übrigen Lagenbeziehungen unterscheiden sich nicht von dem allgemeinen Falle.

§ 12. Die Lagen: 1, 16, 19, 20 sind hyperboloidisch bei den Koordinaten:

$$\begin{matrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & a_2 \end{matrix}$$

$$H_1 \ldots a_4 a_3^2(x_1x_4+x_2x_3) - a_3a_4^2(x_1x_3+x_2x_4) - a_2(a_3^2 - a_4^2)\,x_3x_4 = 0$$

$$H_2 \ldots a_4 a_3^2(x_1x_3+x_2x_4) - a_3a_4^2(x_1x_4+x_2x_3) - a_2(a_3^2 - a_4^2)\,x_1x_2 = 0$$

$$H_3 \ldots \frac{1}{a_2}(x_1x_3+x_2x_4) - \left(\frac{x_1x_2}{a_4}+\frac{x_3x_4}{a_3}\right) = 0$$

$$H_4 \ldots \frac{1}{a_2}(x_1x_4+x_2x_3) - \left(\frac{x_1x_2}{a_3}+\frac{x_3x_4}{a_4}\right) = 0$$

Die Tangenten sind:

$$\begin{matrix} & & a_2x_2 & = a_4x_3 & = a_3x_4 \\ a_2x_1 & & & = a_3x_3 & = a_4x_4 \\ a_3x_1 & = a_4x_2 & & & = a_2x_4 \\ a_4x_1 & = a_3x_2 & = a_2x_3 & & \end{matrix}$$

Auf H_1 liegen: die Kante $\overline{12}$ und:

$\mathfrak{g}_3^1 \ldots a_3x_1 = a_4x_2 = a_2x_4$

$\mathfrak{g}_4^1 \ldots a_4x_1 = a_3x_2 = a_2x_3$

d. s. Tangenten.

Auf H_2 die Kante $\overline{34}$ und:

g_1^2 . . $a_2 x_2 = a_4 x_3 = a_3 x_4$

d. s. Tangenten.

g_2^2 . . $a_2 x_1 = a_3 x_3 = a_4 x_4$

Auf H_3 die Kanten $\overline{14}$ $\overline{23}$

Auf H_4 „ „ $\overline{13}$ $\overline{24}$

Die anderen Erzeugenden durch 1′ 2′ 3′ 4′ sind:

g_1^1 . . . . . $a_3 a_4 x_2 = a_4^2 x_1 + a_2 a_3 x_4 = a_3^2 x_1 + a_2 a_4 x_3$

g_2^1 . . . . . $a_3 a_4 x_1 = a_4^2 x_2 + a_2 a_3 x_3 = a_3^2 x_2 + a_2 a_4 x_4$

g_3^1 . . $(a_3 a_4 - a_2^2)\, x_4 = a_4^2 x_3 - a_2 a_4 x_2 = a_3^2 x_3 - a_2 a_3 x_1$

g_4^1 . . $(a_3 a_4 - a_2^2)\, x_4 = a_4^2 x_4 - a_2 a_4 x_1 = a_3^2 x_3 - a_2 a_3 x_2$

g_1^2 . . $(a_3 a_4 - a_2^2)\, x_1 = a_3^2 x_2 - a_2 a_3 x_4 = a_4^2 x_2 - a_2 a_4 x_3$

g_2^2 . . $(a_3 a_4 - a_2^2)\, x_2 = a_3^2 x_1 - a_2 a_3 x_3 = a_4^2 x_1 - a_2 a_4 x_4$

g_3^2 . . . . . $a_3 a_4 x_3 = a_3^2 x_4 + a_2 a_4 x_1 = a_4^2 x_4 - a_2 a_3 x_1$

g_4^2 . . . . . $a_3 a_4 x_4 = a_3^2 x_3 + a_2 a_4 x_2 = a_4^2 x_3 - a_2 a_3 x_2$

g_1^3 . . . . . $a_2 a_4 x_1 = a_3 a_4 x_3 - a_3^2 x_4 = a_2^2 x_3 - a_2 a_3 x_2$

g_2^3 . . . . . $a_2 a_4 x_2 = a_3 a_4 x_4 - a_3^2 x_3 = a_2^2 x_4 - a_2 a_3 x_1$

g_3^3 . . . . . $a_2 a_3 x_4 = a_2^2 x_2 - a_2 a_4 x_3 = a_3 a_4 x_2 - a_4^2 x_1$

g_4^3 . . . . . $a_2 a_3 x_3 = a_2^2 x_1 - a_2 a_4 x_4 = a_3 a_4 x_1 - a_4^2 x_2$

g_1^4 . . . . . $a_2 a_3 x_1 = a_2^2 x_4 - a_2 a_4 x_2 = a_3 a_4 x_4 - a_4^2 x_3$

g_2^4 . . . . . $a_2 a_3 x_2 = a_2^2 x_3 - a_2 a_4 x_1 = a_3 a_4 x_4 - a_4^2 x_4$

g_3^4 . . . . . $a_2 a_4 x_3 = a_2^2 x_1 - a_2 a_3 x_3 = a_3 a_4 x_1 - a_3^2 x_2$

g_4^4 . . . . . $a_2 a_4 x_4 = a_2^2 x_2 - a_2 a_3 x_4 = a_3 a_4 x_2 - a_3^2 x_1$

§ 13. Ist T auch T' eingeschrieben, so erhalten wir ausser den noch vereinfachten Fällen der drei- und vierfachen Lage, noch die Möglichkeit, dass beide Lagen gleichzeitig stattfinden, aus denen aber folgt, dass auch alle anderen Lagen bis auf 1′ 2′ 4′ 3′ hyperboloidisch sind. Die Tetraeder liegen neunfach hyperboloidisch.

Sind zunächst die Koordinaten:

$$\begin{matrix} 0 & a & -1 & 1 \\ -a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -a \end{matrix}$$

so erhalten wir die dreifach hyperboloidische Lage:

16) 2′ 1′ 3′ 4′ +
19) 3′ 4′ 2′ 1′ —
20) 4′ 3′ 1′ 2′ —

$$H_2 \ldots (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0$$
$$H_3 \ldots x_1(a x_2 + x_4) + x_3(a x_4 - x_2) = 0$$
$$H_4 \ldots x_1(a x_2 - x_4) + x_3(a x_4 - x_2) = 0$$

Auf $x_1 - x_2 = 0$ liegen 33′ 44′
$x_3 - x_4 = 0$ „ 12′ 21′
(33′, 44′) und (12′, 21′) auf $x_1 - x_2 = 0$
$x_3 - x_4 = 0$

Die Tangentialebenen sind:

in 1 $\left.\begin{matrix} a x_2 + x_4 = 0 \\ a x_2 - x_4 = 0 \end{matrix}\right\} x_2 = x_4 = 0$

in 2 $\left.\begin{matrix} a x_1 - x_3 = 0 \\ a x_1 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} x_1 = x_3 = 0$

in 3 $\left.\begin{matrix} a x_4 - x_2 = 0 \\ a x_4 + x_2 = 0 \end{matrix}\right\} x_2 = x_4 = 0$

in 4 $\left.\begin{matrix} a x_3 + x_1 = 0 \\ a x_3 - x_1 = 0 \end{matrix}\right\} x_1 = x_3 = 0$

Die Tangenten sind also die Kanten $\overline{13}$, $\overline{24}$ und ebenso $\overline{1'3'}$ $\overline{2'4'}$.

Die Lage der Tetraeder ist folgende:

1 2 1′ 2′ liegen auf einer Ebene,
3 4 3′ 4′ „ „ „ „

Die beiden durch die vier auf einer Ebene gelegenen Punkte bestimmten Kegelschnittbüschel bestimmen ∞^2 Kurven vierter Ordnung; an alle diese sind $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{1'3'}$, $\overline{2'4'}$ Tangenten.

§ 14. Bei den Koordinaten:

1′	0	1	1	1
2′	1	0	a	$-a$
3′	1	a	$-a$	0
4′	1	$-a$	0	a

sind hyperboloidisch:

$H_1 .\ a x_1(x_2+x_3)-x_4(x_2-x_3)=0$ entspricht 3′ 4′ 2′ 1′ —
$H_2 .\ a x_1(x_3+x_4)-x_2(x_3-x_4)=0$ „ 4′ 3′ 1′ 2′ —
$H_3 .\ a x_1(x_4+x_2)-x_3(x_4-x_2)=0$ „ 2′ 1′ 3′ 4′ —

$H_4 .\ a x_1(x_2-x_3)-x_4(x_2+x_3)+2x_2x_3=0$ „ 1′ 4′ 2′ 3′ +
$H_5 .\ a x_1(x_3-x_4)-x_2(x_3+x_4)+2x_3x_4=0$ „ 1′ 2′ 3′ 4′ +
$H_6 .\ a x_1(x_4-x_2)-x_3(x_4+x_2)+2x_4x_2=0$ „ 1′ 3′ 4′ 2′ +

$H_7 .\ a x_1(x_2+x_3)+x_4(x_2-x_3)+2a x_1x_4=0$ „ 3′ 2′ 4′ 1′ +
$H_8 .\ a x_1(x_3+x_4)+x_2(x_3-x_4)+2a x_1x_2=0$ „ 2′ 1′ 4′ 3′ +
$H_9 .\ a x_1(x_4+x_2)+x_3(x_4-x_2)+2a x_1x_3=0$ „ 4′ 2′ 1′ 3′ +

$H_1+H_2=H_9$	$H_4+H_5=H_6$
$H_1-H_2=H_6$	$H_7+H_8=H_6$
$H_2+H_3=H_7$	$H_8+H_9=H_4$
$H_2-H_3=H_4$	$H_9+H_7=H_5$
$H_1+H_3=H_8$	
$H_1-H_3=H_5$	

Es gehören also zu einem Büschel:

$H_1\ H_2\ H_6\ H_9 \ldots C_1$
$H_2\ H_3\ H_4\ H_7 \ldots C_2$
$H_3\ H_4\ H_5\ H_8 \ldots C_3$
$H_4\ H_5\ H_6 \ldots C_4$
$H_5\ H_9\ H_7 \ldots C_5$
$H_6\ H_7\ H_8 \ldots C_6$
$H_4\ H_8\ H_9 \ldots C_7$

$C_4 - C_7$ sind die 4 Kurven 4. Ordnung, welche aus einer Geraden, der Verbindung von zwei entsprechenden Punkten (11′, 22′, 34′ oder 43′) und der durch die übrigen 6 Punkte bestimmten Kurve dritter Ordnung bestehen.

Die Tangenten sind:

in 1.

$x_2 + x_3 = 0$
$x_3 + x_4 = 0$
$x_4 + x_2 = 0$
$x_2 - x_3 = 0$
$x_3 - x_4 = 0$
$x_4 - x_2 = 0$
$x_2 + x_3 + 2a x_4 = 0$
$x_3 + x_4 + 2a x_2 = 0$
$x_4 + x_2 + 2a x_3 = 0$

in 2.

$a x_1 - x_4 = 0$
$x_3 - x_4 = 0$
$a x_1 + x_3 = 0$
$a x_1 - x_4 + 2 x_3 = 0$
$x_3 + x_4 = 0$
$a x_1 - x_3 + 2 x_4 = 0$
$x_4 + a x_1 = 0$
$2a x_1 + x_3 - x_4 = 0$
$a x_1 - x_3 = 0$

in 3.

$a x_1 + x_4 = 0$
$a x_1 - x_2 = 0$
$x_2 - x_4 = 0$
$- a x_1 - x_4 + 2 x_2 = 0$
$a x_1 - x_2 + 2 x_4 = 0$
$x_2 + x_4 = 0$
$a x_1 + x_4 = 0$
$a x_1 + x_2 = 0$
$2a x_1 + x_4 - x_2 = 0$

in 4.

$x_2 - x_3 = 0$
$a x_1 + x_2 = 0$
$a x_1 - x_3 = 0$
$x_2 + x_3 = 0$
$a x_1 + x_3 - 2 x_2 = 0$
$a x_1 - x_3 + 2 x_2 = 0$
$2a x_1 + x_2 - x_3 = 0$
$a x_1 - x_2 = 0$
$a x_1 + x_3 = 0$

Die Tangenten an C_1 sind:

$$\begin{array}{llll} x_2 = -x_3 = x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_1^9 = \mathfrak{g}_2^1 \\ -a\,x_1 = -x_3 = -x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_2^6 = \mathfrak{g}_2^2 \\ a\,x_1 = x_2 = -x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_3^9 = \mathfrak{g}_3^2 \\ -a\,x_1 = x_2 = x_3 & \ldots & = \mathfrak{g}_4^6 = \mathfrak{g}_4^2 \end{array}$$

Sie treffen die Gegenflächen in:

$$\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -a & -a \\ 1 & a & 0 & -a \\ -1 & +a & a & 0 \end{array}$$

Diese 4 Punkte erhält man, wenn man auf den resp. Geraden $\overline{31'}$, $\overline{32'}$, $\overline{14'}$, $\overline{23'}$ den 4. harmonischen Punkt sucht, zu resp. 3) 1' und den Schnittpunkt von $\overline{31'}$ und $\overline{24}$ u. s. w.

Für C_2 lauten die Formeln:

$$\begin{array}{llll} x_2 = x_3 = -x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_1^7 = \mathfrak{g}_1^3 \\ a\,x_1 = -x_3 = x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_2^4 = \mathfrak{g}_2^3 \\ -a\,x_1 = -x_2 = -x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_3^7 = \mathfrak{g}_3^3 \\ -a\,x_2 = -x_2 = x_3 & \ldots & = \mathfrak{g}_4^4 = \mathfrak{g}_4^3 \end{array}$$

Die Punkte

$$\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -a & a \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & -a & a & 0 \end{array}$$

erhält man ausgehend von: 41', 12', 24', 13'.

Für C_3 lauten die Formeln:

$$\begin{array}{llll} x_2 = -x_3 = -x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_1^8 = \mathfrak{g}_1^1 \\ a\,x_1 = -x_3 = -x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_2^5 = \mathfrak{g}_2^1 \\ a\,x_1 = -x_2 = -x_4 & \ldots & = \mathfrak{g}_3^8 = \mathfrak{g}_3^1 \\ a\,x_1 = x_2 = x_3 & \ldots & = \mathfrak{g}_4^5 = \mathfrak{g}_4^1 \end{array}$$

Die Punkte $\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & a & -a \\ 1 & -a & 0 & -a \\ 1 & a & a & 0 \end{matrix}$ erhält man ausgehend von: 21′, 12′, 44′, 33′.

Ein Mittel zur Konstruktion solcher Tetraeder bietet folgende Eigenschaft.

12′ schneidet 34 in	0	0	1	-1
21′ „ 34 „	0	0	1	1
Der Punkt 3 ist „	0	0	1	1
„ „ 4 „ „	0	0	0	1

Diese 4 Punkte sind harmonisch.

Ebenso zu resp.

$(\overline{13'}\ \overline{23})$ . . .	0	1	-1	0
$(\overline{41'}\ \overline{23})$ . . .	0	1	1	0
$(\overline{14'}\ \overline{24})$ . . .	0	-1	0	1
$(\overline{1'3}\ \overline{24})$ . . .	0	1	0	1
$(\overline{32'}\ \overline{14})$ . . .	1	0	0	$-a$
$(\overline{24'}\ \overline{14})$ . . .	1	0	0	a
$(\overline{42'}\ \overline{13})$ . . .	1	0	a	0
$(\overline{23'}\ \overline{13})$ . . .	1	0	$-a$	0
$(\overline{44'}\ \overline{12})$ . . .	1	$-a$	0	0
$(\overline{33,}\ \overline{12})$ . . .	1	a	0	0

Dasselbe gilt auch von den Kanten von T'. Zieht man also die drei Verbindungslinien aller Ecken des einen Tetraeders mit den drei Ecken der Ebene des anderen Tetraeders in welcher die resp. Ecken liegen, so erhalten wir auf jeder Ecke zwei harmonische Punktpaare.

IV. Spezielle eingeschriebene Lage. (Gruppe III.)

§ 15. T'' sei T' nach Art der Gruppe III. eingeschrieben etwa:

$$1' \text{ in } \bar{1}, \quad 2' \text{ in } \bar{3}$$
$$3' \text{ in } \bar{4}, \quad 4' \text{ in } \bar{2}$$

Die Koordinaten sind:

$$\begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ a_{14} & 0 & a_{34} & a_{44} \end{matrix}$$

1′ 2′ 3′ 4′ ist also nicht hyperboloidisch und wir müssen von einer anderen Grundlage ausgehen, etwa von 1′ 4′ 2′ 4′. Dann ist aber dieser Fall identisch mit dem in §§ 9, 10 besprochenen, indem man durchgehends die Indizes (2 4 3) cyklisch vertauscht.

V. Spezielle eingeschriebene Lage (Gruppe IV).

§ 16. T'' sei T' nach Art der Gruppe IV eingeschrieben, etwa:

$$1' \text{ in } \bar{3}, \quad 2' \text{ in } \bar{4}$$
$$3' \text{ in } \bar{1}, \quad 4' \text{ in } \bar{2}$$

Die Koordinaten sind:

$$\begin{matrix} a_{12} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & 0 & a_{34} & a_{44} \end{matrix}$$

Möglich sind die Lagen: 1) 16) 17) 18)

ferner: 3) 1' 4' 3' 2'- 19) 4' 3' 1' 2'- 23) 2' 4' 1' 3'
6) 3' 2' 1' 4'- 20) 3' 4' 2' 1'- 24) 3' 1' 4' 2'

Mit 3) ist 1) hyperboloidisch bei den Koordinaten:

$$\begin{array}{cccc} -1 & -a & 0 & a \\ -a & c & b & 0 \\ 0 & b & d & b \\ a & 0 & b & c \end{array}$$

$H_1 \ldots b\,x_1\,(x_2 + x_4) - a\,x_3\,(x_2 - x_4) = 0$

$H_2 \ldots b\,x_1\,(x_2 + x_4) - a\,x_3\,(x_2 - x_4) - 2\,c\,x_1\,x_3 = 0$

Es ist dies der erste Fall, dass 1) mit einer Lage aus Gruppe II allein eigentliche Hyperboloide liefert, und es ist bemerkenswert, dass für diesen Zweck nur das Verschwinden von a_{31} und a_{42} genügt, dagegen $a_{13} = a_{24} = c \gtrless 0$.

H_1 wird dann:

$H_1 \ldots b\,x_1\,(x_2 + x_4) - a\,x_3\,(x_2 - x_4) - 2\,a\,b\,c\,(x_1\,x_3 + x_2\,x_4) = 0$

Ueberhaupt erhalten wir zweifach hyperboloidische Lagen mit eigentlichen Hyperboloiden, wenn:

1' 2' 3' 4'
und

1' in $\bar{3}$ 3' in $\bar{1}$	mit den Lagen	1' 4' 3' 2'
1' in $\bar{2}$ 2' in $\bar{1}$	" " "	1' 2' 4' 3'
1' in $\bar{4}$ 4' in $\bar{1}$	" " "	1' 3' 2' 4'
2' in $\bar{3}$ 3' in $\bar{2}$	" " "	4' 2' 3' 1'
2' in $\bar{4}$ 4' in $\bar{2}$	" " "	3' 2' 1' 4'
3' in $\bar{4}$ 4' in $\bar{3}$	" " "	2' 1' 4' 3'

In unserem Falle liegt sowohl 1′ in $\overline{3}$, 3′ in $\overline{1}$ als 2′ in $\overline{4}$, 4′ in $\overline{2}$, deshalb erhalten wir die dreifach hyperboloidische Lage: 1′ 2′ 3′ 4′, 1′ 4′ 3′ 2′, $\underline{3'\ 2'\ 1'\ 4'}$

mit den Koordinaten:

1)	a	1	0	-1
2)	1	a	1	0
3)	0	1	a	1
4)	-1	0	1	a

$$H_1 \ .\ .\ x_1(x_2+x_4) - x_3(x_2-x_4) = 0$$
$$H_2 \ .\ .\ x_1(x_2+x_4) - x_3(x_2+x_4) + 2ax_1x_3 = 0$$
$$H_3 \ .\ .\ x_1(x_2+x_4) - x_3(x_2+x_4) + 2ax_2x_4 = 0$$

Auf H_1 liegen $\overline{13}$ und $\overline{24}$
„ H_2 liegt $\overline{13}$
„ H_3 „ $\overline{24}$

Aus den speziellen Koordinatenwerten:

3′	0	1	a	1
4′	-1	0	1	a
1′	$-a$	-1	0	1
2′	-1	$-a$	-1	0

$a_{ik} = -a_{ki}$

geht hervor, dass auch T in T'' eingeschrieben ist.

VI. Spezielle eingeschriebene Lage. (Gruppe V.)

§ 17. Ist endlich T'' eingeschrieben nach Art der Gruppe V, so ist 1′2′3′4′ nicht hyperboloidisch und wir können zu keinen neuen mehrfachen hyperboloidischen Lagen kommen. (Siehe IV.)

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Allgemeine getrennte Lage 6

§ 1—2. Bedingung hyperboloidischer Lage 6

§ 3. dreifach hyperboloidische Lage mit Gruppe II 10

§ 4. zehnfach hyperboloidische Lage mit Gruppe II 12

§ 3. dreifach hyperboloidische Lage mit Gruppe III 13

§ 5. vierfach hyperboloidische Lage mit Gruppe IV 19

§ 7. vierfach hyperboloidische Lage mit Gruppe V 27

Spezielle Lagen.

II. Eingeschrieben nach Gruppe I

§ 8. vierfach hyperboloidische Lage mit Gruppe IV 29

§ 9. (Ein- und umgeschrieben) dreifach hyperboloidische Lage 33

§ 10. (Ein- und umgeschrieben) fünffach hyperboloidische Lage 35

III. Eingeschrieben nach Gruppe II.

§ 11. dreifach hyperboloidische Lage mit Gruppe III 40

§ 12. vierfach hyperboloidische Lage mit Gruppe IV u. V . . 42

Ein- und umgeschriebene Lage.

§ 13. dreifach hyperboloidische Lage mit Gruppe IV u. V . . 44

§ 14. neunfach hyperboloidische Lage mit Gruppe II—V . . 45

IV. § 15. Eingeschrieben nach Gruppe III 49

V. Eingeschrieben nach Gruppe IV.

§ 16. zwei- und dreifach hyperboloidische Lage mit Gruppe II 49

VI. § 17. Eingeschrieben nach Gruppe V 51

Curriculum vitae.

Geboren am 8. October 1869 zu Altona als Sohn des Rabbinatsassessors *E. Munk* und seiner Frau *Jenny*, geb. *Hildesheimer*, trat ich nach Absolvierung der israelitischen Gemeindeschule in die Quarta des Realgymnasiums, aus welchem ich Herbt 1889 mit dem Zeugnis der Reife entlassen wurde. Ich besuchte darauf der Reihe nach die Universitäten Marburg, München, Marburg.

Meine Lehrer in Marburg waren:

Bauer, *Cohen*, *Elsas*, *Feussner*, *Hess*, *A. Meyer*, *Melde*, *Schottky*, *Study*, *Weber*, *Zincke*,

denen ich hier meinen Dank ausspreche.

Besonders fühle ich mich Herrn Professor *E. Hess* zu Dank verpflichtet für die stete Bereitwilligkeit, mit der er meine Studien während meiner hiesigen Studienzeit förderte.


U.C. BERKELEY LIBRARIES
C004143818
AC831
M3
v.27
Marburg
87046
Digitized by Google

